И. В. Бойков

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пенза 2008

УДК 518.5
Б 77

Рецензенты:
кафедра «Прикладная математика»
Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Политехнический институт. Сибирский федеральный университет»;
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой «Математика и инженерная графика»
государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Пензенский артиллерийский инженерный институт»
О. А. Голованов

Бойков, И. В.
Б 77 Устойчивость решений дифференциальных уравнений: монография/ И. В. Бойков.– Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 244 с.

Монография посвящена изложению одного достаточно общего метода исследования устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Построенные на основании этого метода критерии устойчивости одновременно применимы как в регулярном, так и во всевозможных критических случаях.

В книге получены критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с последействием, разностных уравнений. Исследована устойчивость периодических решений. Отдельная глава посвящена устойчивости решений параболических уравнений.

Полученные в монографии критерии устойчивости применены к исследованию способов стабилизации динамических систем.

В качестве приложения полученных в работе критериев исследована устойчивость нейронных сетей Хопфилда с непрерывными и разрывными функциями активации и устойчивость экологических, экономических и демографических процессов.

Книга адресована математикам, механикам и физикам, которые в своих предметных областях сталкиваются с исследованием устойчивости динамических систем, а также аспирантам и студентам специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Механика».

УДК 518.5

.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена изложению одного достаточно общего метода исследования устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Построенные на основании этого метода критерии устойчивости одновременно применимы как в регулярном, так и во всевозможных критических случаях.

Так как книга посвящена конкретному методу, то в ней не приводятся многие результаты теории устойчивости, тем более, что имеется большое число превосходных книг, посвященных различным разделам теории устойчивости. Метод функций Ляпунова развит в монографии А. М. Ляпунова "Общая задача о теории устойчивости движения", вышедшей из печати в 1892 г. Дальнейшее развитие метод функций Ляпунова получил в книгах М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [3], Е. А. Барбашина [9], Р. Беллмана [11], В. Гана [120], Б. П. Демидовича [50], В. И. Зубова [55], Н. Н. Красовского [68], Ж. Ла-Салля, С. Лефшеца [70], А. И. Лурье [74], И. Г. Малкина [76], А. А. Мартынюка, В. Лакшмикантама, С. Лила [78], В. М. Матросова [80], В. В. Румянцева и А. С. Озиранера [94], Н. Г.Четаева [109].

Исследованию устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах посвящены монографии Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [47], М. А. Красносельского [63], Ж. Массера и Ж. Шеффера [79].

Устойчивости адаптивных систем посвящена книга Б. Андерсона, Р. Битмида, К. Джонсона, М. П. Кокотовича, Р. Кошута, И. Мариэла, Л. Прали, Р. Ридла [4].

Устойчивости движения в системах с последствием посвящены монографии Р. Беллмана, К. Л. Кука [12], Н. Н. Красовского [68], В. Резвана [93].

Устойчивость периодических движений исследовалась в книгах В. И. Арнольда [5], [6], В. А. Якубовича, В. М. Старжинского [113].

Обзор работ по теории устойчивости был проведен в книге Л. Чезари [108].

При исследовании устойчивости движения первым и вторым методами Ляпунова приходится различать регулярный и критические случаи. Для исследования каждого критического случая строится специальная функция Ляпунова.

Построение этих функций во многих случаях является чрезвычайно сложным и трудоемким. Для ряда критических случаев функции Ляпунова построены в монографиях И. Г. Малкина [76], Н. Г. Четаева [109] и в многочисленных публикациях в периодической литературе.

В работах Р. Э. Винограда [34] (в двумерном случае) и Н. Н. Красовского [67] (в общем случае) проведено исследование устойчивости решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в исключительном случае одного нулевого корня. В основу метода положено исследование спектра линеаризованного уравнения в окрестности стационарного решения.

В нашей книге предложен метод исследования устойчивости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, который одновременно охватывает как регулярный, так и всевозможные критические случаи. Метод основан на исследовании спектров и логарифмических норм семейств специальным образом построенных линейных операторов. Этот метод также применен к решению задачи стабилизации систем дифференциальных и разностных уравнений.

Кратко остановимся на содержании книги.

Книга состоит из семи глав.

Первая глава носит вводный характер. В ней для удобства читателей приведены сведения из функционального анализа, даны доказательства неравенств, используемых в работе, приведены классические теоремы о существовании решений дифференциальных уравнений.

Вторая глава является основной. В ней изложен общий метод исследования устойчивости решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и даны его приложения к исследованию устойчивости систем дифференциальных уравнений с последствием, к исследованию систем дифференциальных уравнений второго порядка, к исследованию устойчивости периодических движений и к исследованию устойчивости решений разностных уравнений.

В третьей главе метод, изложенный в предыдущей главе, применяется к исследованию устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Четвертая глава посвящена решению проблемы Брокетта стабилизации движения, описываемого дифференциальными и разностными уравнениями.

В пятой главе исследуется устойчивость нейронных сетей Хопфилда с непрерывными и разрывными функциями активации. С этой целью в пятой главе рассмотрены вопросы устойчивости дифференциальных включений.

Шестая глава посвящена исследованию устойчивости ряда математических моделей экологии. В частности, исследована устойчивость модели Хотеллинга – Скеллама и ряда ее обобщений.

В седьмой главе рассмотрены вопросы устойчивости математических моделей демографии.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$R, C-$ множества вещественных и комплексных чисел.

signx$-$ знак числа $x \in R$.

Rez, Imz$-$ вещественная и мнимая части комплексного числа $z \in C$.

z^*- комплексное сопряжение $z \in C$.

argz$-$ аргумент комплексного числа $z \in C$.

R_n, C_n- пространства n-мерных векторов x с вещественными и комплексными координатами: $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

$\|x\|-$ норма конечномерного вектора $x \in R_n$ или $x \in C_n$.

l_p- норма $(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$, $1 \le p \le \infty$; в том числе:

при $p = 2-$ евклидова норма: $\|x\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$;

при $p = \infty$; $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$;

при $p = 1$; $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

E_n- евклидово пространство.

$(a, b)-$ скалярное произведение векторов из R_n или C_n.

$I-$ единичная матрица.

A^T- транспонирование матрицы $A = ((a_{ij})) : A^T = ((a_{ji}))$.

A^*- комплексное сопряжение и транспонирование $n \times m$ матрицы A, т.е. если $A = ((a_{ij}))$, то $A^* = ((a^*_{ji}))$.

rankA$-$ ранг матрицы A.

λ_i- i-е собственное значение матрицы A, $i = 1, \ldots, n$.

detA$-$ определитель матрицы A.

$\rho(A)-$ спектральный радиус $n \times n$ матрицы A, т.е. максимум модуля ее собственных значений: $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i|$.

$s_i(A)-$ i-е сингулярное число $n \times m$ матрицы $A : s_i(A) = \lambda_i^{1/2}(A^*A)$, $i = 1, \ldots, m$.

$\|A\|-$ норма оператора A в нормированном пространстве;

$\Lambda(A)-$ логарифмическая норма оператора A (стр. 19).

$A_R = \mathrm{ReA} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{A}^*)-$ действительная часть оператора A (стр. 12).

$A_J = \mathrm{ImA} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{A} - \mathrm{A}^*)-$ мнимая часть оператора A (стр. 12).

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}-$ резольвента оператора A (стр. 13).

$\sigma(A)-$ спектр оператора A.

$S(a,r)$– множество элементов x нормированного пространства X, определяемых равенством $\|x-a\|=r$.

$R(a,r)$– множество элементов x нормированного пространства X, определяемых неравенством $\|x-a\|\leq r$.

Г л а в а 1

ВВЕДЕНИЕ

1. Определения. Вспомогательные предложения
1.1. Нормированные пространства

Рассмотрим некоторое множество E, в котором введены две операции: сложение элементов и умножение на число, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

4) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения);

6) в E существует нулевой элемент θ, такой, что $0 \cdot x = \theta$ для $\forall x \in E$;

7)$1 \cdot x = x$ для $\forall x \in E$.

Множество E, удовлетворяющее перечисленным свойствам, называется линейным пространством (вещественным, если числа $\lambda-$ вещественные, или комплексным, если $\lambda-$ комплексные).

Предположим, что каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|\|$ (норма), удовлетворяющее условиям:

а)$\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

б) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (однородность нормы);

в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство, в котором введено понятие нормы, называется линейным нормированным пространством.

Линейное нормированное пространство E называется полным или банаховым пространством, если из того, что $\| x_n - x_m \|_E \to 0$
при $n, m \to \infty$ следует сходимость последовательности $\{x_k\}$ к некоторому элементу $x \in E$ по норме пространства E, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \| x - x_k \|_E = 0$. Банаховы пространства будем обозначать буквой B.

Полное линейное нормированное пространство называется гильбертовым пространством ($H-$ пространством), если в нем введено скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, обладающее свойствами:

а) $(x, y) = (\overline{y, x})$ (в частности $(x, x)-$ вещественное число);

б) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого комплексного числа λ;

г) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

При этом скалярное произведение связано с нормой равенством $(x, x) = \| x \|^2$.

1.2. Линейные операторы

Пусть B_1 и B_2 – банаховы пространства. Отображение A из B_1 в B_2 называется линейным оператором, если $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых чисел α, β и любых элементов $x, y \in B_1$.

Оператор называется непрерывным, если он каждую сходящуюся (по норме в B_1) последовательность элементов $\{x_n\}$ переводит в сходящуюся (по норме в B_2) последовательность элементов $\{Ax_n\}$.

Оператор A называется ограниченным, если существует такое положительное число K, что для $\forall x \in B$ $\| Ax \| \leq K \| x \|$. Наименьшее из значений K, при которых выполняется предыдущее неравенство, называется нормой оператора A и обозначается $\| A \|$. Отметим, что $\| A \| = \sup\limits_{\|x\|=1} \| Ax \|$.

Линейный ограниченный оператор A, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 будем обозначать как $A \in [B_1, B_2]$.

Замкнутое линейное подмножество банахова пространства называется его подпространством. Говорят, что пространство B распадается в прямую сумму подпространств B_1 и $B_2, B = B_1 \oplus B_2$, если каждый элемент $x \in B$ допускает единственное представление в виде $x = x_1 \oplus x_2$, где $x_1 \in B_1; x_2 \in B_2$. Каждое из подпространств B_1, B_2 называется прямым дополнением друг друга.

Отметим, что в пространстве B можно ввести норму следующим образом: $\| x \| = \| x_1 \| + \| x_2 \|$, где $x = x_1 + x_2;\ x_1 \in B_1;\ x_2 \in B_2,\ B = B_1 \oplus B_2$. Введенная таким образом норма называется максимальной.

При исследовании линейных операторов в гильбертовых пространствах часто наряду с оператором A рассматривают его действительную и мнимые части $A_R = \mathrm{Re}\ A = (A + A^*)/2$ и $A_J = \mathrm{Im}\ A = (A - A^*)/(2i)$. Здесь через A^* обозначен оператор, сопряженный с A. В случае если $A-$

матрица, то A^*- матрица, комплексно сопряженная с A. Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Пусть $B-$ комплексное банахово пространство. Точка λ комплексной плоскости называется регулярной точкой оператора A, если существует оператор (называемый резольвентой оператора A) $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, $I-$ тождественный оператор. $(A - \lambda I)^{-1}-$ оператор, обратный к $(A - \lambda I)$. Определение обратного оператора приведено в разделе 1.4. Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек открыто. Его дополнение до плоскости комплексной переменной называется спектром оператора A и обозначается символом $\sigma(A)$. Спектр $\sigma(A)$ всегда замкнут, непуст и лежит в круге $\mid \sigma(A) \mid \leq \parallel A \parallel$.

Комплексное число λ называется собственным значением оператора A в комплексном банаховом пространстве B, если существует такой $x \in B(\parallel x \parallel \neq 0)$, что $Ax = \lambda x$. Элемент x, удовлетворяющий этому равенству, называется собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Пусть $A = \{a_{i,j}\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-$ матрица с вещественными элементами, $I-$ единичная матрица. Уравнение $\det(A-\lambda I) = 0$ называется вековым или характеристическим. Корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ векового уравнения называются характеристическими числами или собственными значениями матрицы A.

Уравнение $\det(A-\lambda I) = 0$ имеет вид $a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n = 0$. Полином $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ называется характеристическим полиномом.

В разделе 8 главы 2 нам понадобятся следующие определения.

Полином $f(z) = a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ с действительными или комплексными коэффициентами называется полиномом Гурвица, если его корни $z_1, \ldots, z_n$ имеют отрицательные вещественные части: $\mathrm{Re} z_i < 0, \ i = = 1, 2, \ldots, n$.

Полином $f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ с действительными коэффициентами, у которого $a_0 > 0, \quad a_n \neq 0$, называется стандартным полиномом степени $n, n \geq 1$.

Рассмотрим стандартный полином $f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, где $a_0 > 0$, $a_n \neq 0, \quad n \geq 1$.

Из коэффициентов стандартного полинома $f(z)$ составляется $n \times n$

матрица

$$H_f = \left(\begin{array}{cccccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_n \end{array} \right),$$

которая называется матрицей Гурвица.

Теорема Гурвица [50]. Для того, чтобы стандартный полином являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\ldots$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$$

его матрицы Гурвица H_f.

Известны различные способы определения операторов в нормированных пространствах.

В теории устойчивости широко используется операционное исчисление Рисса, связывающее аналитические функции комплексной переменной с операторными функциями.

Пусть $A \in [B, B]$. Обозначим через K_A класс функций $\varphi(\lambda)$ комплексной переменной, кусочно-аналитических на спектре $\sigma(A)$ оператора A.

Функции из класса K_A обладают следующими свойствами [47]:

1) область определения $D(\varphi)$ функции $\varphi \in K_A$ состоит из конечного числа открытых связных компонент, объединение которых содержит спектр $\sigma(A)$;

2) функция $\varphi(\lambda)$ аналитическая в каждой компоненте области $D(\varphi)$;

3) существует гладкий контур $\Gamma(A)$, охватывающий весь спектр оператора A. Если этот контур распадается на конечное число отдельных контуров, то каждый из них обходится таким образом, чтобы открытое множество, входящее в резольвентное множество оператора A, оставалось слева.

На множестве K_A можно естественным образом ввести сложение, умножение и умножение на скаляр.

Операторное исчисление Р. Рисса определяет алгебраический изоморфизм между алгеброй K_A и коммутативной алгеброй операторов, определяемый формулой

$$\varphi(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(A)} \varphi(\lambda) R_\lambda d\lambda, \tag{1.1}$$

где $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$.

Из теоремы Коши следует независимость интеграла в (1.1) от конкретного выбора контура при условии, что контур $\Gamma(A)$ охватывает спектр оператора A.

Линейность соответствия (1.1) очевидна.

Его мультипликативность следует из формулы

$$\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(A)} F_1(\lambda) R_\lambda d\lambda\right\} \times \left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(A)} R_\lambda F_2(\lambda) d\lambda\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(A)} F_1(\lambda) R_\lambda F_2(\lambda) d\lambda,$$

справедливость которой доказана в [47, стр. $30 - 31$].

1.3. Принцип неподвижной точки

В математике и ее многочисленных приложениях видное место занимает следующий фундаментальный факт, который называется принципом неподвижной точки.

Рассмотрим в банаховом пространстве B уравнение

$$x = A(x),$$

где $A(x)-$ не обязательно линейный оператор, отображающий B в себя. Имеет место

Теорема Банаха о неподвижной точке [75]. Пусть в банаховом пространстве B дан оператор A, переводящий элементы пространства B снова в элементы этого пространства. Пусть, кроме того, для всех x и y из B $\| Ax - Ay \| \leq q \| x - y \|$, где $q < 1$ и не зависит от x и y. Тогда существует одна и только одна точка x_0, такая, что $A(x_0) = x_0$. Точка x_0 называется неподвижной точкой оператора A.

Приведем еще одну теорему о неподвижной точке.

Обобщенная теорема о неподвижной точке [47]. Пусть при некотором натуральном $v \geq 1$ оператор A^v удовлетворяет условию $\| A^v x - A^v y \| \leq q \| x - y \|$ $(q < 1)$. Тогда в B существует одна и только одна неподвижная точка x_* оператора A. Эта точка может быть получена из любой точки $x_0 \in B$ как предел последовательности

$$x_* = \lim_{n \to \infty} A^n x_0.$$

1.4. Обратные операторы

Линейный непрерывный оператор B называется левым обратным для линейного оператора A, если $BA = I$, где $I-$ тождественный оператор. Левый обратный оператор для линейного оператора A обозначается как A_l^{-1}.

Линейный непрерывный оператор C называется правым обратным для линейного непрерывного оператора A, если $AC = I$. Правый оператор для линейного оператора A обозначается как A_r^{-1}.

Известно, что если оператор A имеет как левый, так и правый обратный операторы, то они равны между собой и определяются как линейный обратный оператор $A^{-1} : A_l^{-1} = A_r^{-1} = A^{-1}$.

С понятием обратного оператора связаны вопросы существования и единственности решений операторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$Ax = f, \tag{1.2}$$

где линейный оператор A отображает нормированное пространство X в нормированное пространство Y; $f-$ известный элемент пространства Y; $x \in X-$ неизвестный элемент.

Предположим, что оператор A имеет правый линейный обратный оператор A_r^{-1}. Положим $x = A_r^{-1} f$ и подставим это значение в левую часть уравнения (1.2). Получаем тождество $A(A_r^{-1} f) = f$.

Таким образом, если оператор A имеет правый обратный оператор A_r^{-1}, то уравнение (1.2) всегда разрешимо.

Предположим теперь, что оператор A имеет левый обратный оператор A_l^{-1}, и уравнение (1.2) имеет решение $x^* : Ax^* = f$. Воздействуя на обе части предыдущего равенства оператором A_l^{-1}, имеем $A_l^{-1}(Ax^*) = A_l^{-1} f$, т. е. $x^* = A_l^{-1} f$. Отсюда следует, что если уравнение (1.2) имеет решение, то это решение единственно.

Если оператор A имеет линейный обратный, то уравнение (1.2) имеет единственное решение, так как выше было отмечено, что $A^{-1} = A_l^{-1} = A_r^{-1}$.

Приведем теоремы Банаха [75] об условиях существования обратного оператора.

Теорема 1.1(Банах). Пусть $X - B$-пространство и $U \in B[X, X]$. Тогда, если

$$\| U \| \leq q < 1,$$

то оператор $I - U$ имеет непрерывный обратный, причем

$$\| (I - U)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - q}.$$

Теорема 1.2 (Обобщенная теорема Банаха). Пусть $U_0 \in B[X, Y]$, где X и Y два B-пространства, и пусть существует $U_0^{-1} \in B[Y, X]$. Тогда, если оператор $U \in B[X, Y]$ удовлетворяет условию

$$\| U \| < \frac{1}{\| U_0^{-1} \|},$$

то оператор $V = U_0 + U$ имеет непрерывный обратный V^{-1}, причем

$$\| V^{-1} \| \leq \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} U \|} \leq \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} \| \| U \|}.$$

1.5. Дифференцирование и интегрирование в нормированных пространствах

Введем операции дифференцирования и интегрирования в нормированных пространствах. Пусть $E-$ линейное нормированное пространство и $R-$ множество точек числовой прямой. Оператор $x = x(t)$ (не обязательно линейный), отображающий R в E, называется абстрактной функцией числового аргумента t. Функция $x(t)$ называется непрерывной в точке t_0 отрезка $[a, b]$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$, такое, что $\| x(t) - x(t_0) \| < \epsilon$ при $t \in [a, b]$ и $| t - t_0 | < \delta$.

Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ функцию $x(t)$. Производная (по Фреше) функции $x(t)$ в точке t_0 определяется по формуле

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

если существует предел в смысле сходимости по норме.

В ряде случаев будет использовано понятие производной Фреше от нелинейного оператора $A(x)$, отображающего некоторое множество Ω пространства B в пространство B.

Определение 1.1 [75]. Если для любого элемента $h \in B$ существует предел

$$\lim_{\|h\| \to 0} \| A(x_0 + h) - A(x_0) - A'(x_0)h \| \to 0,$$

где $A'(x_0)-$ линейный ограниченный оператор, то $A'(x_0)-$ производная по Фреше оператора $A(x)$ в точке x_0.

Заканчивая этот раздел, приведем важное понятие интеграла от абстрактной функции числового аргумента. Пусть абстрактная функция числового аргумента $x(t)$ задана на сегменте $[a, b]$ $(t \in [a, b])$. Разобьем сегмент $[a, b]$ произвольно на n частей точками $t_k : a = t_0 < t_1 ... < t_n = b$ и в каждом сегменте $[t_k, t_{k+1}]$ возьмем произвольную точку $\tau_k(t_k \le \tau_k \le$ $\le t_{k+1})$. Вычислим значение функции $x(t)$ в точке τ_k и составим интегральную сумму вида

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x(\tau_k)(t_{k+1} - t_k).$$

Перейдем в последовательности интегральных сумм $S_n(n = 1, 2, ...)$ к пределу при $n \to \infty$, полагая, что при этом $\sup_k \mid t_{k+1} - t_k \mid \to 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа деления сегмента $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от способа выбора точек τ_k на частичных отрезках, то говорят [75], что интеграл от функции $x(t)$ по отрезку $[a, b]$ существует, и обозначают его символом $\int\limits_a^b x(t)dt$.

Более общим является следующее определение интеграла Римана от функций со значениями в банаховом пространстве.

Определение 1.2 [8]. Отображение

$$(t_1, \ldots, t_n) \to f(t_1, \ldots, t_n) \in B;$$

$$t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Omega \subset E_n$$

называется функцией со значениями в банаховом пространстве B, определенной на множестве $\Omega \subset E_n$.

Определение 1.3 [8]. Интегралом (Римана)

$$\int\limits_{\Omega} u(t)dt$$

от функции $u:\Omega\to B$ называется такой элемент $b\in B$, что

$$\psi(b)=\int\limits_{\Omega}\psi(u(t))dt$$

для всех ψ из сопряженного к B пространства B^*.

На интеграл от абстрактной функции $x(t)$ распространяются многие свойства обычных интегралов Римана. В частности, отметим одно из них

$$\left\|\int\limits_a^b f(t)dt\right\|\le\int\limits_a^b \| f(t) \| \,dt,$$

которым будем часто пользоваться. Это неравенство доказывается точно так же, как в теории интеграла Римана доказывается неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right|\le\int\limits_a^b | f(t) | \,dt.$$

1.6. Логарифмическая норма

В теории дифференциальных уравнений часто используется оператор-функция e^{At}, которую проще всего ввести с помощью одного из двух равноценных соотношений:

$$e^{At}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A} e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda; \qquad (1.3)$$

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}, \qquad (1.4)$$

где $I-$ тождественный оператор.

Из мультипликативности соответствия $\varphi(\lambda)\leftrightarrow\varphi(A)$ между аналитическими функциями комплексной переменной и операторными функциями следует, что операторы e^{At} образуют однопараметрическую группу:

$$\begin{cases} e^{At}e^{A\tau}=e^{A(t+\tau)} \quad (-\infty<t;\tau<\infty), \\ \quad e^{At}|_{t=0}=I. \end{cases}$$

Заметим что, в общем случае $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Равенство здесь имеет место, когда $AB = BA$.

Дифференцируя соотношение (1.3) по t под знаком интеграла, мы получаем формулу:

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}.$$

Действительно,

$$\frac{de^{At}}{dt} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A} \lambda e^{\lambda t}(A - \lambda I)^{-1} d\lambda = Ae^{At}.$$

Используя ряд (1.4), нетрудно получить оценку:

$$\|e^{At}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\| t^k}{k!} = e^{\|A\|t} \quad (t \geq 0). \tag{1.5}$$

Обозначим через Re z действительную часть комплексного числа z и приведем следующую теорему.

Теорема 1.3 [47] . Для того чтобы вещественному числу ρ отвечало положительное N_ρ, такое, что

$$\| e^{At} \| \leq N_\rho e^{\rho t} \quad (t \geq 0), \tag{1.6}$$

необходимо условие Re $\lambda \leq \rho$ при всех $\lambda \in \sigma(A)$ и достаточно выполнение неравенства Re $\lambda < \rho$ при всех $\lambda \in \sigma(A)$.

При исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений широко используется оценка $\|e^{At}\|$, выраженная через спектр оператора A.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1.3, напомним несколько полезных утверждений.

Пусть $A-$ линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства B в банахово пространство B. Через K_A обозначим класс всех функций комплексной переменной $\varphi(\lambda)$ кусочно аналитических на спектре оператора A $(\lambda \in \sigma(A))$.

Теорема 1.4 (Теорема Данфорда) [48]. Пусть $A \in [B, B]$, функция $\varphi(\lambda) \in K_A$. Тогда $\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))$.

Из теоремы Данфорда следует

Лемма 1.1 [47]. Если $\|e^A\| = q(< q)$, то спектр $\sigma(A)$ оператора A лежит в (внутри) замкнутой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \leq \ln \mathrm{q}$.

Доказательство. Из теоремы Данфорда следует, что

$$\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)}. \tag{1.7}$$

Известно, что спектр оператора A всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leq \|A\|$. Из равенства (1.7) следует, что $|e^{\sigma(A)}| \leq q$. Отсюда $|\sigma(A)| \leq \ln q$.

Приведем доказательство теоремы 1.3.

Пусть выполнена оценка (1.6). Тогда согласно теореме Данфорда и лемме 1.1 спектр $\sigma(At) = (t\sigma(A))$ лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \leq \ln N_\rho + \rho t$ $(t \geq 0)$.

Отсюда при любом $t > 0$ спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости

$$\mathrm{Re}\lambda \leq \frac{\ln \mathrm{N}_\rho}{\mathrm{t}} + \rho.$$

Ввиду произвольности $t > 0$ следует первая часть утверждения.

Для доказательства второй части запишем e^{At} в виде

$$e^{At} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda,$$

предполагая, что контур Γ_A целиком лежит внутри полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < \rho$. Тогда

$$\|e^{At}\| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_A} |e^{\lambda t}|\|R_\lambda\||d\lambda| \leq N_\rho e^{\rho t},$$

где $N_\rho = \frac{l}{2\pi}\max\limits_{x\in\Gamma_A}\|R_\lambda\|$; $l-$ длина контура Γ_A. Теорема доказана.

Пусть A и $B-$ самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H. Известно, что спектр самосопряженного оператора A вещественный и принадлежит интервалу

$$\lambda_m(A) = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x) \leq \sigma(A) \leq \sup_{\|x\|=1}(Ax, x) = \lambda_M(A).$$

В монографии [47] приведена оценка

$$e^{\lambda_m(A)} \leq\| e^{A+iB} \|\leq e^{\lambda_M(A)} =\| e^A \|,$$

которой будем часто пользоваться.

Дадим еще одно определение.

Определение 1.4 [47]. Логарифмической нормой оператора A называется предел

$$\Lambda(A) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\| I + hA \| -1}{h},$$

где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

В монографии [47] показано, что $\Lambda(A)$ всегда существует (но может принимать отрицательные значения). Там же приведены следующие свойства логарифмической нормы:

$$\Lambda(\alpha A) = \alpha\Lambda(A) \quad \alpha \geq 0, \quad | \Lambda(A) | \leq \| A \|;$$

$$\Lambda(A + B) \leq \Lambda(A) + \Lambda(B); | \Lambda(A) - \Lambda(B) | \leq \| A - B \|;$$

$$\Lambda(A) + \Lambda(-A) \geq 0, \quad e^{-\Lambda(-A)} \leq \| e^A \| \leq e^{\Lambda(A)}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$-\Lambda(-A) \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \Lambda(A)$$

для всех $\lambda \in \sigma(A)$. Предыдущее определение допускает обобщение.

Определение 1.5. Пусть A и $B-$ линейные ограниченные операторы, действующие из B-пространства X в B-пространство Y. Логарифмической нормой оператора B относительно оператора A называется предел

$$\Lambda(A, B) = \lim_{h\to 0} \frac{\|A + hB\| - \|A\|}{h}.$$

В случае, когда $A-$ матрица размера $n \times n$, $\Lambda(A)$ легко вычисляется по нормам некоторых пространств.

В частности, логарифмические нормы квадратных матриц известны в пространствах l_1 и c (см., например, [47]). Если логарифмическая норма вычисляется в пространстве l_1 всех абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_j|$, то

$$\Lambda(A) = \sup_j \left(\mathrm{Re}\ a_{jj} + \sum_{k=1,k\neq j}^{\infty} |a_{kj}| \right),$$

в то время как $\|A\| = \sup\limits_k \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|$.

Если логарифмическая норма вычисляется в пространстве c всех сходящихся последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_{j=1} |\xi_j|$, то

$$\Lambda(A) = \sup_j \left(\mathrm{Re}\, a_{jj} + \sum_{k=1, k\neq j}^{\infty} |a_{jk}| \right),$$

в то время как $\|A\| = \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|$.

Замечание. Отметим, что отрицательное значение логарифмической нормы матрицы A в пространствах l и c эквивалентно тому, что спектр матрицы A расположен в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной.

Это следует из критерия Гершгорина локализации собственных значений матриц.

Напомним этот критерий. Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-$ матрица с комплексными элементами.

Теорема 1.5 (Гершгорина) [39]. Каждое собственное значение λ матрицы A находится в одном из кругов

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, если a_{ii} отрицательны при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, и $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, то собственные значения матрицы A лежат в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной.

В работе широко используются неравенства

$$e^{-\Lambda(-A)t} \leq \|e^{At}\| \leq e^{\Lambda(A)t}, \tag{1.8}$$

связывающие норму операторной функции e^{At} с логарифмической нормой.

Приведем доказательство этих неравенств. Правое неравенство вытекает из следующих рассуждений. Очевидно, что

$$e^{At}x = \exp\{\frac{I + hA - I}{h} t\}x.$$

Сделаем замену переменной t, положив $\tau = t/h$. Последняя замена законна, так как $h \downarrow 0$. Тогда

$$\exp\{\frac{I + hA - I}{h} t\}x = \exp\{(I + hA - I)\tau\}x = \exp\{(I + hA)\tau\}\exp\{-I\tau\}x.$$

Переходя к нормам, имеем:

$$\|e^{At}x\| \le \|e^{(I+hA)\tau)}\| \|e^{-\tau}x\| \le$$
$$\le e^{\|I+hA\|\tau}e^{-\tau}\|x\| = e^{(\|I+hA\|-1)t/h}\|x\| = e^{\Lambda(A)t}\|x\|.$$

Аналогичным образом доказывается левая часть неравенства (1.8).

1.7. Неравенства

Приведем несколько неравенств, используемых в работе.

Лемма 1.2 [9]. Пусть $u(t)-$ непрерывная функция, удовлетворяющая при $t > t_0$ неравенству

$$0 < u(t) < \delta + \int\limits_{t_0}^{t} (\eta + Lu(t))dt, \tag{1.9}$$

$\delta, \eta, L-$ постоянные, $\delta \ge 0, \eta \ge 0, L > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$u(t) < \frac{\eta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1) + \delta e^{L(t-t_0)}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Доказательство леммы проведем от противного. Пусть $t = \tau-$ ближайший момент времени, при котором неравенство (1.10) нарушится, т. е. превратится в равенство.

Рассматривая неравенство (1.9) при $t = \tau$ и помня, что на полуинтервале $t_0 \le t < \tau$ неравенство (1.10) еще не нарушено, получим:

$$u(\tau) < \delta + \int\limits_{t_0}^{\tau} \left(\eta + L\left[\frac{\eta}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right) + \delta e^{L(t-t_0)}\right]\right)dt.$$

Проведя интегрирование и подставив пределы, будем иметь неравенство:

$$u(\tau) < \frac{\eta}{L}\left(e^{L(\tau-t_0)} - 1\right) + \delta e^{L(\tau-t_0)},$$

противоречащее выбору τ. Лемма доказана.

Докажем следующую лемму, являющуюся обобщением предыдущей.

Лемма 1.3 (Гронуолла – Беллмана) [50]. Пусть $u(t) \ge 0$ и $f(t) \ge$ ≥ 0 при $t \ge t_0, u(t), f(t)$ непрерывны в интервале $[t_0, \infty)$ и при $t \ge t_0$ выполнено неравенство

$$u(t) \le C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1, \tag{1.11}$$

где $C-$ положительная постоянная. В таком случае при $t \geq t_0$ имеем

$$u(t) \leq C \exp\{\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1\}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Из неравенства (1.11) получаем

$$\frac{u(t)}{C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq 1$$

и, следовательно, $(f(t) \geq 0)$

$$\frac{f(t)u(t)}{C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq f(t). \tag{1.13}$$

Интегрируя (1.13) в пределах от t_0 до t и замечая, что

$$\frac{d}{dt}\left(C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right) = f(t)u(t),$$

получаем:

$$\ln\left(C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right) - \ln C \leq \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1.$$

Потенцируя, имеем:

$$C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \leq \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1\right).$$

Отсюда, используя неравенство (1.11), находим:

$$u(t) \leq C + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \leq \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1\right).$$

Лемма доказана.

Обобщением леммы Гронуолла – Беллмана является следующее утверждение.

Лемма 1.4. Пусть $u(t)-$ непрерывная функция, удовлетворяющая при $t > t_0$ неравенству

$$0 < u(t) < \delta + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)g(u(s))ds, \tag{1.14}$$

где $\delta = \mathrm{const} > 0$, $v(s)$, $g(s)-$ неотрицательные функции, причем $g(s)$ обратима и $g^{-1}(s) \geq s$ при $s \geq 1$, $g(\alpha s) \leq f(\alpha)g(s)$, $\alpha = \mathrm{const}$, $f(s)-$ неотрицательная функция. Тогда имеет место неравенство

$$u(t) < \delta g^{-1}\left(\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{t_0}^{t} v(s)ds\right)\right). \tag{1.15}$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного. В момент времени t_0 неравенство (1.15) справедливо. Обозначим через τ момент времени, когда неравенство (1.15) нарушается, т. е. превращается в равенство. Так как на интервале $[t_0, \tau)$ неравенство (1.15) справедливо, то из (1.14) имеем

$$u(\tau) < \delta + \int\limits_{t_0}^{\tau} v(s)g(\delta g^{-1}\left(\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{t_0}^{s} v(t)dt\right)\right))ds \leq$$

$$\leq \delta + \int\limits_{t_0}^{\tau} v(s)f(\delta)\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{t_0}^{s} v(t)dt\right)ds =$$

$$= \delta + \delta\left(\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s)ds\right) - 1\right) =$$

$$= \delta\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s)ds\right).$$

Отсюда следует, что

$$u(\tau) < \delta\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s)ds\right),$$

т. е. неравенство (1.15) в точке τ не нарушается.

Приведем еще одно доказательство этой леммы.

Доказательство. Из условия $g(\alpha s) \leq f(\alpha)g(s)$ следует, что $g(u(s)) = g(\delta\delta^{-1}u(s)) \leq f(\delta)g(\delta^{-1}u(s))$. Тогда неравенство (1.14) можно усилить: $0 < u(t) < \delta + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)g(u(s))ds < \delta + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)f(\delta)g(\delta^{-1}u(s))ds$.

Разделим обе части предыдущего неравенства на δ

$$0 < \frac{u(t)}{\delta} < 1 + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\frac{f(\delta)}{\delta}g(\delta^{-1}u(s))ds$$

и воспользуемся тем, что из обратимости функции $g(t)$ и условия $g^{-1}(t) \geq t$ при $t \geq 1$ (т. е. условия $g(t) \leq t$ при $t \geq 1$) следует, что

$$g\left(\frac{u(t)}{\delta}\right) < 1 + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\frac{f(\delta)}{\delta}g\left(\frac{u(s)}{\delta}\right)ds.$$

Теперь, применяя неравенство Гронуолла – Беллмана и воспользовавшись обратимостью функции $g(t)$, завершаем доказательство леммы.

Лемма 1.5. Пусть $u(k)$ удовлетворяет при $k > n_0$ неравенству $0 < u(k) < \delta + \sum\limits_{i=n_0}^{k-1} v(i)g(u(i))$, $u(n_0) < \delta$, где $\delta = \text{const} > 0$, $v(s)$– неубывающая функция, а $g(s)$ удовлетворяет условиям леммы 1.4 причем $f(s)/s \geq 1$ при $s \geq 0$. Тогда имеет место неравенство

$$u(k) < \delta g^{-1}\left[\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{n_0}^{k} v(s)ds\right)\right]. \tag{1.16}$$

Доказательство. Неравенство (1.16) справедливо при $k = n_0$. Пусть n^* первое значение переменной k, при котором неравенство(1.16) нарушается. Тогда

$$u(n^*) < \delta + \sum_{i=n_0}^{n^*-1} v(i)f(\delta)\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{n_0}^{i} v(s)ds\right) <$$

$$< \delta + \int\limits_{n_0}^{n^*} v(s)f(\delta)\exp\left(\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{n_0}^{s} v(s)ds\right)ds = \delta + \delta\exp\left[\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{n_0}^{n^*} v(s)ds\right] - \delta =$$

$$= \delta\exp\left[\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{n_0}^{n^*} v(s)ds\right] < \delta g^{-1}\left(\exp\left[\frac{f(\delta)}{\delta}\int\limits_{n_0}^{n^*} v(s)ds\right]\right),$$

т. е. при n^*– неравенство не нарушается. Лемма доказана.

При исследовании разностных уравнений в главе 2 нам понадобится следующее утверждение, являющееся распространением утверждения леммы 1.2 на разностные уравнения.

Лемма 1.6. Пусть при $n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$0 < u(n+1) < \delta + \sum_{k=n_0}^{n} (\eta + Lu(k)),$$

где $\delta, \eta, L-$ постоянные, $\delta \geq 0$, $\eta \geq 0$, $L > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$u(n) < \frac{\eta}{L}\left(e^{L(n-n_0)} - 1\right) + \delta e^{L(n-n_0)}.$$

Доказательство леммы 1.6 подобно доказательству леммы 1.2 и поэтому опускается.

2. Определения устойчивости решений дифференциальных уравнений

В этом разделе приведем, следуя [47], [50], определения устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Прежде всего приведем определение устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим в банаховом пространстве B нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)) \tag{2.1}$$

с начальным значением

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.2}$$

Будем считать, что задача Коши $(2.1) - (2.2)$ имеет решение при $t_0 \leq$ $\leq t < \infty$.

Выделим некоторое решение $x(t) = \varphi(t)$ уравнения (2.1) и назовем его невозмущенным движением (невозмущенным решением).

Определение 2.1. Решение $\varphi(t)$ уравнения (2.1) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого как угодно малого $\epsilon(\epsilon > 0)$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\| x(t_0) - \varphi(t_0) \| < \delta$ следует $\| x(t) - \varphi(t) \| < \epsilon$ при $t \geq t_0$. (Здесь через $x(t)$ обозначено любое решение уравнения (2.1), определенное начальным условием $x(t_0)$).

Определение 2.2. Решение $\varphi(t)$ уравнения (2.1) называется асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} \parallel x(t) - \varphi(t) \parallel = 0$.

Определение 2.3. Решение $\varphi(t)$ уравнения (2.1) называется экспоненциально устойчивым, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\parallel x(t) - \varphi(t) \parallel \leq Ae^{-\alpha t}$, где A и α– положительные константы, не зависящие от t.

Определение 2.4. Решение $\varphi(t)$ уравнения (2.1) называется устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво при любом $x_0 \in B$.

Рассмотрим задачу Коши (2.1), (2.2) в предположении, что оператор $A(t, x)$ определен при $t \in [0, \infty)$ и $x \in B$.

Обозначим через $x(t; t_0, x_0)$ решение уравнения (2.1) при начальном значении (2.2).

Определение 2.5. Уравнение (2.1) устойчиво по Лагранжу, если:

1) каждое решение $x(t; t_0, x_0)$, где $t_0 \in [0, \infty)$, неограниченно продолжаемо вправо, т. е. имеет смысл при $t \in [0, \infty)$;

2) норма $\|x(t; t_0, x_0)\|$ ограничена на (t_0, ∞).

Определение 2.6. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2.1) $(a < t < \infty)$ называется неустойчивым по Ляпунову, если при некоторых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \in (a, \infty)$ и любых $\delta > 0$ существует хотя бы одно решение $x_\delta(t)$ и момент времени $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такие, что $\|x_\delta(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$, $\|x_\delta(t_1) - \varphi(t_1)\| > \varepsilon$.

Приведем, следуя [1], определение технической устойчивости.

Техническая устойчивость характеризуется следующими ограничениями по сравнению с общей постановкой задачи устойчивости движения:
1) дана область Ω_0 начальных условий дифференциальных уравнений, устойчивость которых исследуется;
2) дан промежуток времени t, $t_0 \leq t \leq T$, в течение которой исследуется процесс;
3) дана область Ω, из которой не должны выходить траектории решений дифференциальных уравнений в течение всего временного интервала t, $t_0 \leq t \leq T$.

Определение 2.7. Тривиальное решение уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t, x(t))$ называется технически устойчивым относительно заданных параметров Ω_0, t_0, T, Ω, в том и только в том случае, если всякое возмущенное решение с $x(t_0) \in \Omega_0$ в течение промежутка времени t $(t_0 \leq t \leq T)$ не покидает области Ω.

В ряде случаев более предпочтильно исследовать устойчивость тривиального решения, выделив в правой части уравнения слагаемое $f(t, x(t))$, определяющее возмущающие силы:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)) + f(t, x(t)). \tag{2.3}$$

В этом случае вводится ограничение: возмущающие функции $f(t, x(t))$, $t \in [t_0, T]$, $x(t) \in \Omega$ принадлежат области Π.

Определение 2.8. Тривиальное решение уравнения (2.3) технически устойчиво, если при $t \in [t_0, T]$, $x(t_0) \in \Omega_0$, $f(t, x(t)) \in \Pi$, оно не выходит из области Ω.

Устойчивость по Тюрингу. При исследовании многих динамических процессов можно считать, что их развитие однородно в пространстве и зависит только от времени. Такие процессы удобно описывать системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для простоты обозначений ограничимся системой, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= g_1(t, u_1, u_2), \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= g_2(t, u_1, u_2), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $g_i(t, u_1, u_2)-$ нелинейные непрерывные функции, $i = 1, 2$.

При использовании этой модели для описания процессов, развивающихся в пространстве и во времени, предполагается, что рассматриваемые процессы однородны по пространственной переменной. Формально это можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} &= g_1(t, u_1, u_2); \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} &= g_2(t, u_1, u_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

при начальных значениях

$$u_i(t_0, x) = u_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.6}$$

не зависящих от пространственных координат.

Тюринг показал [126], [7], что в ряде случаев добавление диссипативных слагаемых вызывает переход системы к новому состоянию равновесия.

Это означает, что к системе (2.5) добавляются диссипативные слагаемые

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = g_1(t,u_1,u_2) + a_{11}\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = g_2(t,u_1,u_2) + a_{21}\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x^2} \qquad (2.7)$$

и наряду с начальными вводятся граничные условия

$$u_i(t,a) = u_i^0; \quad u_i(t,b) = u_i^1; \qquad (2.8)$$
$$\frac{\partial u_i(t,a)}{\partial x} = \frac{\partial u_i(t,b)}{\partial x} = 0,$$

$i = 1,2,\ a \le x \le b$.

При ряде значений параметров a_{ij}, $i,j = 1,2$, происходит переход к новому состоянию равновесия. Этот процесс называется неустойчивостью по Тюрингу.

Дадим формальное определение.

Определение 2.9. Стационарное решение $u_i^0(t,x)$, $i = 1,2$, системы уравнений (2.5), определенное в области $\Omega : \{((t,x) : (t_0,\infty) \times [a,b])$, называется устойчивым по Тюрингу, если для любого $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ найдется такое $\delta(\delta(\varepsilon))$, что при выполнении неравенства $|a_{ij}| \le \delta$, $i,j = 1,2$, справедливо неравенство $\sup\limits_{t_0 \le t < \infty, x \in [a,b]} |u_i(t,x) - u_i^0(t,x)| \le \varepsilon$.

В противном случае система уравнений (2.5) называется неустойчивой по Тюрингу.

В этом разделе, следуя [82], [110], напомним определение устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть дана система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = F\left(t, x, \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n \Psi(x,t)}{\partial x^n}\right) \qquad (2.9)$$

с граничными условиями

$$\Psi(x_*,t) = A(t); \quad \Psi(x^*,t) = B(t);$$
$$\frac{\partial \Psi(x_*,t)}{\partial x} = A_1(t); \quad \frac{\partial \Psi(x^*,t)}{\partial x} = B_1(t);$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1}\Psi(x_*,t)}{\partial x^{n-1}} = A_{n-1}(t); \quad \frac{\partial^{n-1}\Psi(x^*,t)}{\partial x^{n-1}} = B_{n-1}(t) \tag{2.10}$$

и с начальными условиями

$$\Psi(x.t_0) = c(x). \tag{2.11}$$

Здесь $t \in [t_0, \infty)$, $x_* \leq x \leq x^*$.

Решением этой системы является вектор $\Psi(x,t) = (\psi_1(x,t), \ldots, \psi_l(x,t))$.

Дадим определение устойчивости системы (2.9) – (2.11) относительно начальных условий. При нулевом начальном распределении получаем невозмущенный процесс $\Psi(x,t) \equiv 0$. Каждому начальному распределению $(\psi_1(x,t_0), \ldots, \psi_l(x,t_0))$ соответствует свой вектор решения $\Psi(x,t)$.

В работе рассматриваются системы с распределенными параметрами, имеющие для любых начальных значений из рассматриваемой области решения, определенные при всех значениях $t \in [t_0, \infty)$.

Мерой отклонения возмущенного процесса от невозмущенного называется [82] вещественный функционал $\rho = \rho[\Psi(x,t), t]$, определенный для каждого фиксированного момента времени $t \geq t_0$ на множестве вектор - функций $\Psi(x,t)$ и удовлетворяющий условиям:

1)$\rho[\Psi, t] \geq 0$;

2)$\rho[0, t] = 0$;

3) для любого рассматриваемого процесса $\Psi(x,t)$ вещественная функция $\rho[\Psi(x,t), t]$ от аргумента t непрерывна по t.

Здесь $\rho[\Psi, t]$ измеряет близость возмущенного состояния процесса от невозмущенного в момент времени t. Если $\rho(\Psi, t)$ не зависит явно от t и его значение полностью определяется состоянием $\Psi = \Psi(x,t)$, то будем писать $\rho[\Psi]$.

Пусть в каждый момент времени t определены две меры отклонений $\rho_H = \rho_H(\Psi)$ и $\rho = \rho[\Psi, t]$, которые представляют собой вещественные неотрицательные числа для любого t и для любого состояния $\Psi(x,t)$ в области значений x, причем $\rho_H(0) = 0$ и $\rho[0, t] = 0$.

Мера отклонения ρ_H от времени t явно не зависит; она называется начальным приближением.

Определение 2.10 [82]. Невозмущенный процесс $\Psi \equiv 0$ называется устойчивым по двум мерам ρ и ρ_H, если для любого наперед данного положительного числа ϵ и для каждого $t_0 \in [0, T]$ можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$, что для всех допустимых распределений, удовлетворяющих условию $\rho_H < \delta(\epsilon, t_0)$, в любой момент времени $t > t_0$ имеет место неравенство $\rho < \epsilon$.

Определение 2.11 [82]. Невозмущенный процесс $\Psi \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым по двум мерам ρ и ρ_H, если он устойчив по этим мерам и существует такое $\delta_0(t_0) > 0$, что для любого допустимого начального распределения с $\rho_H < \delta_0$ все допустимые процессы удовлетворяют условию $\rho \to 0$ при $t \to \infty$.

Определение 2.12 [82]. Невозмущенный процесс $\Psi \equiv 0$ называется устойчивым по мерам ρ, ρ_H равномерно относительно начальных моментов времени $t_0 \in [0, T]$, если для любого наперед данного положительного числа ϵ можно указать такое положительное число $\delta(\epsilon)$, одно и то же для любых $t_0 \in [0, T]$, что для всех допустимых процессов с начальными распределениями, удовлетворяющими условию $\rho_H < \delta(\epsilon)$ при $t_0 \in [0, T]$, в любой момент времени $t > t_0$ выполняется неравенство $\rho < \epsilon$.

Определение 2.13 [82]. Процесс называется экспоненциально устойчивым по мере ρ, если для всех допустимых процессов $\Psi(x, t)$ при начальных данных из окрестности $\{\rho\}_{t_0} \leq H$ существуют такие положительные постоянные α, β, a, b, что в любой момент времени $t \geq t_0$ выполняется условие $\{\rho\}_{t_0} a e^{-\alpha t} \leq \rho \leq \{\rho\}_{t_0} b e^{-\beta t}$.

В случае устойчивости по одной мере получаем $\rho_H = \rho_{t=t_0}$.

3. Существование решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

В данном разделе приводятся необходимые для дальнейшего операторные решения дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. При изложении этого раздела использованы результаты монографии [47].

Рассмотрим в банаховом пространстве B дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{3.1}$$

с постоянным оператором A и непрерывной вектор-функцией $f(t)$.

Отметим, что в качестве частного случая уравнение (3.1) можно рассматривать в n-мерном векторном пространстве R_n. Тогда всюду ниже под пространством B нужно понимать пространство R_n, под оператором $A-$ матрицу размера $n \times n$, а под элементами x и $f - n$- мерные вектор-столбцы.

Прежде всего рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{3.2}$$

соответствующее уравнению (3.1).

Найдем решение задачи Коши для уравнения (3.2) при начальном условии

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.3}$$

Пользуясь свойством $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$ оператор-функции e^{At}, сразу находим, что функция $e^{A(t-t_0)}x_0$ является решением задачи (3.2), (3.3).

Нетрудно показать, что это решение единственное в классе дифференцируемых функций. Пусть имеются два решения x_0 и x^0 задачи (3.2), (3.3). Обозначим их разность через $y(t)$. Тогда $y(t)$ удовлетворяет уравнению (3.2) и условию Коши $y(t_0) = 0$. Поэтому решение $y(t)$ уравнения (3.2) при $y(t_0) = 0$ можно записать в виде интегрального уравнения

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Ay(\tau)d\tau.$$

Переходя к нормам, получаем:

$$\| y(t) \| = \| \int\limits_{t_0}^{t} Ay(\tau)d\tau \| = \| A \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau \| \leq$$

$$\leq \| A \| \int\limits_{t_0}^{t} \| y(\tau) \| \, d\tau \leq \| \, \|A\| \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \| y(\tau) \| \, |t - t_0|.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|y(\tau)\| \leq \|A\| |t - t_0| \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|y(\tau)\|$$

невозможное при $\| A \| | t - t_0 | < 1$.

Таким образом, единственность решения доказана.

Найдем теперь решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения (3.1). Для этого воспользуемся методом вариации. Решение уравнения (3.1) будем искать в виде $x(t) = e^{A(t-t_0)}y(t)$.

Подставив эту функцию в уравнение (3.1), получим:

$$e^{A(t-t_0)}\frac{dy(t)}{dt} = f(t).$$

Нетрудно видеть, что оператор $e^{-A(t-t_0)}$ является обратным к оператору $e^{A(t-t_0)}$. Поэтому

$$\frac{dy}{dt} = e^{-A(t-t_0)}f(t)$$

и, следовательно,

$$y(t) = c + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)}f(s)ds.$$

Отсюда

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}c + e^{A(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)}f(s)ds.$$

Так как решение $x(t)$ должно удовлетворять начальному условию (3.3), то $c = x(t_0) = x_0$. Окончательно имеем

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds. \tag{3.4}$$

Решение (3.4) краевой задачи (3.1), (3.3) единственно.

Перейдем теперь к уравнению с переменным оператором:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \quad (t \in J), \tag{3.5}$$

где $J-$ конечный или бесконечный промежуток.

Уравнению (3.5) соответствует однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t). \tag{3.6}$$

Следуя [47], докажем, что если функции $f(t)$ и $A(t)x(t)$ (при любых $x \in B$) непрерывны на конечных интервалах, принадлежащих J, то уравнение (3.5) при начальном условии

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.7}$$

имеет всюду на J непрерывно дифференцируемое решение.

Так как функции $f(t)$ и $A(t)x(t)$ непрерывны, то задача Коши (3.5), (3.7) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{3.8}$$

Обозначим $g(\tau) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau \tag{3.9}$$

с непрерывной на J вектор функцией $g(t)$. Покажем, что на любом конечном интервале $[t_0, T] \in J$ уравнение (3.9) имеет непрерывное решение.

Обозначим через $C(B, [a, b])$ банахово пространство непрерывных на $[a, b]$ функций, принимающих значение из B с нормой

$$|||x||| = \max_{t \in [a,b]} \| x(t) \| .$$

Рассмотрим в этом пространстве оператор

$$(Sx)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau,$$

определяемый правой частью уравнения (3.9). Этот оператор переводит $C(B, [t_0, T])$ в себя, так как оператор $(Sx)(t)$ непрерывен на $[t_0, T]$.

Нетрудно видеть, что

$$(Sx)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau;$$

$$(S^2(x))(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)g(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} A(t_2)\int_{t_0}^{t_2} A(t_1)x(t_1)dt_1dt_2 =$$

$$= g(t) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)g(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_2} A(t_2)A(t_1)x(t_1)dt_1dt_2.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим равенство:

$$(S^n x)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} A(t_1)g(t_1)dt_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_2} A(t_2)A(t_1)g(t_1)dt_1dt_2 + \ldots +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_{n-1}}\ldots\int_{t_0}^{t_2}A(t_{n-1})A(t_{n-2})\ldots A(t_1)g(t_1)dt_1\ldots dt_{n-1}+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}A(t_n)A(t_{n-1})\ldots A(t_1)x(t_1)dt_1\ldots dt_n,$$

из которого следует, что

$$(S^n x_2)(t)-(S^n x_1)(t)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}A(t_n)A(t_{n-1})\ldots A(t_1)(x_2(t_1)-x_1(t_1))dt_1\ldots dt_n.$$

Переходя к нормам, будем иметь:

$$\parallel (S^n x_2)(t)-(S^n x_1)(t)\parallel=$$

$$=\left\|\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}A(t_n)A(t_{n-1})\ldots A(t_1)(x(t_2)-x(t_1))dt_1\ldots dt_n\right\|\leq$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}\parallel A(t_n)\parallel\ldots\|A(t_1)\|\parallel x_2(t_1)-x_1(t_1)\parallel dt_1\ldots dt_n\leq$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}\parallel A(t_n)\parallel\parallel A(t_{n-1})\parallel\ldots\parallel A(t_2)\|A(t_1)\|\parallel dt_1\ldots dt_n\times$$

$$\times\sup_{t_0\leq t_1\leq T}\parallel (x_2(t_1)-x_1(t_1))\parallel=$$

$$=|\parallel x_2-x_1\parallel|\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}\parallel A(t_n)\parallel\parallel A(t_{n-1})\parallel\ldots\parallel A(t_1)\parallel dt_1\ldots dt_n.$$

В книге [100] доказано (при других обозначениях) равенство

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_n}\ldots\int_{t_0}^{t_2}\parallel A(t_n)\parallel\parallel A(t_{n-1})\parallel\ldots\parallel A(t_1)\parallel dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{t}\parallel A(t_n)\parallel\parallel A(t_{n-1})\parallel\ldots\parallel A(t_1)\parallel dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\int_{t_0}^{t}\parallel A(\tau)\parallel d\tau\right]^n. \qquad (3.10)$$

Таким образом, доказана оценка

$$| \parallel S^n x_2 - S^n x_1 \parallel | \leq \frac{1}{n!}\left[\int\limits_{t_0}^{T} \parallel A(\tau) \parallel d\tau\right]^n | \parallel x_2 - x_1 \parallel |.$$

Так как при конечном T величина $\int\limits_{t_0}^{T} \parallel A(\tau) \parallel d\tau$ ограниченна, то при достаточно больших $n(n \geq N)$

$$\frac{1}{n!}\left[\int\limits_{t_0}^{T} \parallel A(\tau) \parallel d\tau\right]^n \leq q < 1.$$

Поэтому оператор S^n является сжимающим. В разделе 1.3 было отмечено, что если S^n- сжимающий оператор, то уравнение $x = Sx$ имеет одно решение. Так как уравнение (3.9) эквивалентно задаче Коши (3.5), (3.7), уравнение (3.5) при начальном условии (3.7) имеет на любом конечном интервале $[t_0, T] \subset J$ точно одно непрерывное решение.

Непрерывное решение находится предельным переходом $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} S^n x_0(t)$ при любой непрерывной функции, определенной на J.

Поэтому решение $x(t)$ может быть представлено рядом

$$x(t) = g(t) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)g(t_1)dt_1 +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t_n} \ldots \int\limits_{t_0}^{t_2} A(t_n)A(t_{n-1})\ldots A(t_1)g(t_1)dt_1\ldots dt_n = g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t),$$

где $g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)g_{k-1}(\tau)d\tau, \quad g_0(t) = g(t).$

Введем в рассмотрение линейный оператор

$$U(t) = I + \int\limits_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1 +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t_n} \ldots \int\limits_{t_0}^{t_2} A(t_n)A(t_{n-1})\ldots A(t_1)dt_1\ldots dt_n. \tag{3.11}$$

Из оценки (3.10) получаем

$$\| U(t) \| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int_{t_0}^{t} \| A(\tau) \| \, d\tau \right]^{1/n} < \infty,$$

и, следовательно, ряд сходится.

При помощи оператора $U(t)$ решение задачи Коши для уравнения (3.6) при начальном условии (3.7) записывается в виде $x(t) = U(t)x_0$.

Операторная функция $U(t)$ обладает рядом важных свойств. На некоторых из них мы остановимся.

Прежде всего отметим справедливость равенства

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \tag{3.12}$$

причем $U(t_0) = I$. Справедливость этого утверждения проверяется непосредственно подстановкой функции $U(t)$ в обе части уравнения (3.12).

Покажем следуя [47], что существует оператор $U^{-1}(t)$, обратный к оператору $U(t)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{dV}{dt} = -VA(t),$$

которое называется союзным по отношению к уравнению (3.12). Обозначим через $V(t)$ решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $V(t_0) = I$. Рассмотрим теперь функцию $W_1(t) = V(t)U(t)$. Тогда

$$\frac{dW_1(t)}{dt} = V(t)\frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt}U(t) = VAU - VAU = 0.$$

Так как решением последнего уравнения является константа и $W_1(t_0) = V(t_0)U(t_0) = I$, то $W_1(t) = I$, т. е. $V(t)U(t) = I, V(t) = U_r^{-1}(t)$.

Рассмотрим теперь функцию $W_2(t) = U(t)V(t)$. Составим дифференциальное уравнение

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = AUV - UVA = AW_2 - W_2A.$$

Нетрудно видеть, что $W_2(t) = I$ является решением этого уравнения. В силу единственности решения любое другое решение совпадает с тождественным. Поэтому $W_2(t) = U(t)V(t) = I$ и $V(t) = U(t)_l^{-1}$. (Отметим, что единственность решений рассматриваемых уравнений следует из непрерывности их правых частей).

Введем обозначение $U(t_1, t_0) = U(t_1)U^{-1}(t_0)$. Оператор $U(t_1, t_0)$ называется эволюционным (разрешающим) оператором дифференциального уравнения (3.6) или оператором Коши. Оператор $U(t, t_0)$ позволяет записать решение однородного уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ при начальном условии $x(t_0)$ в виде $x(t) = U(t, t_0)x(t_0)$, а решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \tag{3.13}$$

при начальном условии $x(t_0) = x_0$ в виде

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)f(\tau)d\tau. \tag{3.14}$$

Справедливость формулы (3.14) проверяется непосредственной подстановкой ее в уравнение (3.13).

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t, x(t)) \tag{3.15}$$

при начальном условии

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.16}$$

Используя оператор $U(t, t_0)$, решение задачи Коши (3.15) – (3.16), можно записать в виде интегрального уравнения

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)B(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Это уравнение будет использовано в следующей главе при исследовании устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений.

4. Численный метод определения областей расположения собственных значений

При исследовании динамических систем важную роль играют алгоритмы нахождения собственных значений матриц или, что достаточно во многих случаях, областей их расположения.

Рассмотрим вначале случай систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для устойчивости такой системы достаточно, чтобы собственные значения были расположены внутри единичной окружности с центром в начале координат плоскости комплексной переменной или, что то же самое, чтобы корни характеристического уравнения

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

были бы расположены внутри этой окружности.

Замечание. Мы оставляем в стороне случай, когда собственное значение единичной кратности находится на самой единичной окружности.

Для построения численного алгоритма локализации корней характеристического многочлена воспользуемся понятием индекса [40] и одним из его свойств.

Пусть $L-$ гладкий замкнутый контур и $G(t)-$ заданная на нем непрерывная функция, не обращающаяся в нуль.

Определение 4.1 [40]. Индексом функции $G(t)$ по контуру L называется деленное на 2π приращение ее аргумента при обходе контура L в положительном направлении.

Лемма 4.1 [40]. Если $G(t)$ есть краевое значение функции аналитической внутри контура, то ее индекс равен числу нулей (с учетом их кратности) внутри контура.

Лемма 4.2 [40]. Если $G(t)$ аналитическая внутри контура всюду за исключением конечного числа точек, в которых она имеет полюсы, то ее индекс равен разности числа нулей и числа полюсов (с учетом их кратностей).

Известно [40], что индекс функции $G(t)$ определяется формулой

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G'(t)}{G(t)}dt. \tag{4.1}$$

Рассмотрим интеграл

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{q'(t)}{q(t)}dt, \tag{4.2}$$

где $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат плоскости комплексной переменной z; $q(x) = 1/p(x)$, $p(x)-$ характеристический полином.

Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что индекс функции $q(x)$ равен взятому с противоположным знаком числу нулей полинома $p(x)$. Таким образом, если все корни полинома $p(x)$ расположены внутри единичной окружности с центром в начале координат, то $\chi = -n$.

Отсюда вытекает алгоритм локализации корней характеристического уравнения в случае дискретных систем.

Сделаем подстановку $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ и оценим снизу модуль функции $p(e^{it})$ на единичной окружности. Если $\min_{t\in[0,2\pi]} |p(e^{it})| \geq \alpha > 0$, то переходим к вычислению интеграла (4.2), который естественно представить в виде

$$\chi = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{p'(t)}{p(t)}dt. \tag{4.3}$$

Так как функция $p'(t)/p(t)$ является аналитической в некотором кольце $\rho \leq |t| \leq R, \rho < 1,\ R > 1$, то [85] квадратурная формула прямоугольников является наилучшей. Пусть $M-$ целое число. Квадратурная формула прямоугольников для интеграла (4.3) имеет вид

$$\chi = -\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \frac{p'(e^{i2k\pi/M})}{p(e^{i2k\pi/M})}e^{i2\pi/M} + R_M(p). \tag{4.4}$$

Можно показать, что погрешность $R_M(p)$ квадратурной формулы (4.4) оценивается неравенством

$$|R_M(p)| \leq B(\rho^M + (1/R)^M)). \tag{4.5}$$

В случае, если ограничиться условием, что функция $p'(t)/p(t)$ имеет производные до r-го порядка, причем r-я производная ограничена константой K, то [85]

$$|R_M(p)| = O(M^{-r}). \tag{4.6}$$

Так как индекс $\chi-$ целое число, то достаточно, используя оценки (4.5), (4.6), выбрать M таким, чтобы $|R_M(p) \leq 1/2$.

Если $\chi = -n+R_M(p)$, где $|R_M(p) \leq 1/2$, то все корни характеристического полинома расположены внутри единичной окружности с центром в начале координат.

Уменьшая радиус окружности γ в формуле (4.2), можно более точно локализовать корни характеристического уравнения и оценить "запас"устойчивости соответствующего разностного уравнения.

Замечание 4.1. Аналогичные рассуждения справедливы и для локализации корней квазиполиномов.

При исследовании устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами также возникает задача локализации корней характеристического многочлена

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

В этом случае для устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического многочлена были расположены в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной (мнимая ось исключается).

Известно, что дискретный спектр оператора A расположен внутри и на окружности с центром в начале координат и с радиусом $R = \|A\|$.

Обозначим через γ контур, состоящий из сегмента $[-R, R]$ на мнимой оси, сегмента $[-R, R]$ на прямой $x = -R$, полуокружности радиуса $R/2$ с центром в точке $(-R/2, R)$ и выпуклой вверх и полуокружности радиуса $R/2$ с центром в точке $(-R/2, R)$ и выпуклой вниз.

Предположим, что собственные значения матрицы не лежат на контуре γ.

Замечание 4.2. В случае, если собственные значения лежат на части контура γ, не пересекающейся с мнимой осью, можно положить $R = \|A\| + \varepsilon$, где $\varepsilon-$ как угодно малое положительное число.

Обозначим через $B(\gamma)-$ область ограниченную контуром γ. Тогда число корней характеристического многочлена, расположенных в области $B(\gamma)$, определяется формулой

$$n(B(\gamma)) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{p'(t)}{p(t)}dt. \tag{4.7}$$

К интегралу (4.7) применим квадратурную формулу прямоугольников по равноотстоящим узлам. Ее единственным отличием от стандартной формулы прямоугольников по равноотстоящим узлам является то, что в число узлов входят концы сегментов.

Опишем узлы квадратурной формулы. Узлы $v_k^1 = (0, -Ri + 2kRi/M)$, $k = 0, 1, \dots, M$, $v_k^2 = (-R, -Ri + 2kRi/M)$, $k = 0, 1, \dots, M$, расположены на боковых сторонах области $B(\gamma)$.

Узлы на верхней полуокружности описываются на плоскости комплексной переменной точками $z_k^1 = (-R/2, Ri) + (R/2)e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k = k\pi/M$,

$k = 0, 1, \dots, M$. На нижней полуокружности – точками $z_k^2 = (-R/2, -Ri)-$ $-(R/2)e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k = \pi + k\pi/M$, $k = 0, 1, \dots, M$.

В результате получаем квадратурную формулу

$$n(B(\gamma)) = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{2Ri}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{p'(v_k^1)}{p(v_k^1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi Ri}{2M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{p'(z_k^1)e^{ik\pi/M}}{p(z_k^1)} - \frac{2Ri}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{p'(v_k^2)}{p(v_k^2)} + \frac{\pi Ri}{2M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{p'(z_k^2)e^{ik\pi/M}}{p(z_k^2)}\right\}+R_M(p). \tag{4.8}$$

Погрешность этой формулы зависит от расстояния $d(\gamma)$ корней характеристического многочлена от контура γ и оценивается величиной Kq^{4M}, где $q < 1$, $4M-$ число узлов квадратурной формулы; $K-$ постоянное число не зависящее от M, а зависящее только от $d(\gamma)$.

Отсюда следует, что при достаточно больших значениях M, погрешность квадратурной формулы становится меньше $1/2$ и квадратурная формула определяет число корней характеристического многочлена в области $B(\gamma)$.

Замечание 4.3. Сдвигая влево правую сторону области $B(\gamma)$, можно определить "запас"устойчивости характеристического многочлена.

Глава 2

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В разделах 1, 2 данной главы приведены классические результаты по устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений. При изложении этого материала мы следуем монографиям [9], [11], [47], [50], [68].

В остальных разделах построены критерии устойчивости решений систем различного вида дифференциальных уравнений, охватывающие одновременно регулярный и всевозможные критические случаи.

1. Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим в банаховом пространстве B дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{1.1}$$

с постоянным оператором A и непрерывной вектор-функцией $f(t)$.

Отметим, что уравнение (1.1) можно рассматривать в n-мерном векторном пространстве R_n. Тогда всюду ниже под пространством B нужно понимать пространство R_n, под оператором $A-$ матрицу размера $n \times n$, а под элементами x и f — n-мерные вектор-столбцы.

Будем исследовать решение задачи Коши для уравнения (1.1) при начальном условии

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Приведем классический критерий устойчивости решения задачи Коши (1.1), (1.2). Пусть x^*- решение этой задачи. Сделаем замену переменных $x(t) = v(t) + x^*(t)$. В результате замены получим

$$\frac{dv}{dt} = Av, \tag{1.3}$$

$$v(t_0) = 0. \tag{1.4}$$

Очевидно, невозмущенным решением этой задачи Коши является тождественный нуль. Дадим $v(t_0)$ некоторое приращение, положив

$$v(t_0) = v_0, \tag{1.5}$$

и исследуем отклонение решения задачи Коши (1.3), (1.5) от тождественного нуля. Решением последней задачи является функция $v(t) = e^{A(t-t_0)}v_0$. Поэтому

$$\| v(t) \| \leq \left\| e^{A(t-t_0)} \right\| \| v_0 \| .$$

В силу теоремы 1.3 из предыдущей главы $\| e^{A(t-t_0)} \| \leq Ne^{\lambda(t-t_0)}$, где $\lambda = \max(\mathrm{Re}\ \sigma(A))$. Поэтому если спектр оператора A расположен в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной z и $\lambda < 0$, то $\| v(t) \| \leq Ne^{\lambda(t-t_0)} \| v_0 \| \to 0$ при $t \to \infty$. Выбирая $\| v_0 \|$ достаточно малой, без труда убеждаемся, что $\| v(t) \| < \epsilon$ при $t \geq t_0$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1 [47]. Если спектр оператора A расположен в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной, то невозмущенное решение задачи Коши (1.1), (1.2) асимптотически устойчиво.

Замечание. Можно показать, что задача Коши (1.1), (1.2) неустойчива, если хотя бы одно собственное значение оператора А лежит в правой полуплоскости.

Исследование устойчивости решений уравнений с переменными коэффициентами значительно сложнее и ему будут посвящены разделы 4−6 данной главы. Однако в ряде частных случаев возможно получить легкообозримые утверждения. Одним из них является случай, когда оператор $A(t)$ коммутирует с оператором $B(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$. Напомним, что два оператора $A(t)$ и $B(t)$ называются коммутирующими, если $A(t)B(t) = B(t)A(t)$.

Теорема 1.2 [50]. Пусть операторы $A(t)$ и $B(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ коммутируют. Если существует оператор $B = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ и спектр оператора B расположен в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной z, то невозмущенное решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \tag{1.6}$$

асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выше было показано, что устойчивость решения уравнения (1.6) следует из устойчивости решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t). \tag{1.7}$$

Поэтому исследуем устойчивость невозмущенного решения уравнения (1.7). Так как операторы $A(t)$ и $B(t)$ коммутируют, то дифференцированием нетрудно проверить, что решение задачи Коши для уравнения (1.7) при начальном условии $x(t_0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = \left(\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)\right) x_0.$$

Обозначим $\lambda = \max \mathrm{Re}\ \sigma(B)$. По условию теоремы $\lambda < 0$. Возьмем произвольное $\epsilon(\epsilon > 0)$, такое, что $\lambda + \epsilon < 0$. Из теории пределов следует, что для данного ϵ найдется такое T, что при $t \geq T$

$$\left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau - B \right\| < \epsilon.$$

Поэтому если операторы B и $\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ коммутируют, то решение при $t \geq T$ можно оценить следующим образом:

$$\| x(t) \| = \left\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} x_0 \right\| \leq \left\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \right\| \| x_0 \| =$$

$$= \left\| e^{B(t-t_0)} e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau - B(t-t_0)} \right\| \| x_0 \| \leq$$

$$\leq \| e^{B(t-t_0)} \| \, e^{\| \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau - B(t-t_0) \|} \| x_0 \| \leq$$

$$\leq N e^{\lambda(t-t_0)} e^{\epsilon(t-t_0)} \| x_0 \| \leq N e^{(\lambda-\epsilon)(t-t_0)} \| x_0 \|.$$

Так как $\lambda + \epsilon < 0$, то при $t \to \infty$ $\| x(t) \| \to 0$. Поэтому, выбрав норму $\| x_0 \|$ достаточно малой, можно добиться, чтобы $\| x(t) \| \leq \epsilon$ для всех t.

Выше было сделано предположение о коммутируемости операторов B и $\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$. Докажем его.

Из условия теоремы следует, что

$$A(t)\int\limits_{s}^{t} A(\tau)d\tau = \left(\int\limits_{s}^{t} A(\tau)d\tau\right) A(t).$$

Продифференцируем это равенство по переменной s. Тогда $A(t)[-A(s)] =$

$= [-A(s)]A(t)$, т. е. $A(t)A(s)] = A(s)A(t)$.

Интегрируя последнее равенство по t и s, приходим к следующему:

$$\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \frac{1}{s}\int\limits_{t_0}^{s} A(\sigma)d\sigma = \frac{1}{s}\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{t_0}^{s} A(\tau)A(\sigma)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{s}\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{t_0}^{s} A(\sigma)A(\tau)d\sigma = \frac{1}{s}\int\limits_{t_0}^{s} A(\sigma)d\sigma \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau.$$

Переходя в предыдущем равенстве к пределу при $s \to \infty$, получим:

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right) B = B\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right),$$

т. е. операторы B и $\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ коммутируют. Теорема доказана.

Замечание. Коммутативность операторов $A(t)$ и $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ достаточно сложно проверить. Из доказательства теоремы следует, что достаточно коммутативности $A(t)$ и $A(s)$ при любых t и s при $t, \tau \geq t_0$.

Эта теорема допускает следующие обобщения.

Теорема 1.2'. Пусть существует оператор $B(t)$, удовлетворяющий условиям:

1) при t, $s \geq t_0$ операторы $B(t)$ и $B(s)$ коммутируют;

2) спектр оператора $B = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} B(\tau)d\tau$ расположен в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной и справедливы неравенства $\sup \mathrm{Re}\sigma(B) = -\alpha$, $\alpha > 0$, $\|e^{B(t-t_0)}\| \leq Ne^{-(\alpha-\epsilon)(t-t_0)}$, где $\epsilon (\epsilon > 0)-$ как угодно малое число, $N = \mathrm{const}$, $N > 0$;

3) справедливо неравенство $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s)ds<\alpha$, где $\psi(s)=\|A(s)-$
$-B(s)\|$.
Тогда невозмущенное решение уравнения (1.6) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выше было показано, что устойчивость решения уравнения (1.6) следует из устойчивости решения уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t).$$

Представим это уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt}=B(t)x(t)+(A(t)-B(t))x(t).$$

Предыдущее уравнение имеет решение

$$x(t)=e^{\int\limits_{t_0}^{t}B(\tau)d\tau}x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int\limits_{s}^{t}B(\tau)d\tau}(A(s)-B(s))x(s)ds.$$

Выше уже отмечалось, что при достаточно больших t

$$\|e^{\int\limits_{t_0}^{t}B(\tau)d\tau}\|\leq Ne^{-(\alpha-\epsilon)(t-t_0)},$$

где $\epsilon(\epsilon>0)-$ как угодно малое число, $N=\mathrm{const}$.

Тогда

$$\|x(t)\|\leq Ne^{-(\alpha-\epsilon)(t-t_0)}\|x_0\|+N\int\limits_{t_0}^{t}e^{-(\alpha-\epsilon)(t-s)}\|A(s)-B(s)\|\|x(s)\|ds.$$

Введем функцию

$$\varphi(t)=\|x(t)\|e^{(\alpha-\epsilon)t}.$$

Тогда

$$\varphi(t)\leq N\varphi(t_0)+N\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\psi(s)ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла $-$ Беллмана, имеем

$$\varphi(t)\leq N(\exp(\mathrm{N}\int\limits_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}}\psi(\mathrm{s})\mathrm{ds}))\varphi(\mathrm{t}_0).$$

Возвращаясь к нормам, имеем

$$\|x(t)\| \leq N\exp(N\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s)ds-(\alpha-\epsilon)(t-t_0))\|x(t_0)\| =$$

$$= N\|x(t_0)\|\exp\left(\left(\left(\frac{N}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s)ds\right)-(\alpha-\epsilon)\right)(t-t_0)\right).$$

Таким образом, если $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s)ds<\alpha$, то решение уравнения (1.6) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Об устойчивости решения уравнения (1.7) в гильбертовом пространстве H можно судить, воспользовавшись следующим изящным неравенством.

Теорема 1.3 [47]. Для любого решения $x(t)$ уравнения (1.7) в гильбертовом пространстве H функция

$$\varphi_M(t)=\|x(t)\|\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_M[A_R(\tau)]d\tau\right\}$$

является невозрастающей, а функция

$$\varphi_m(t)=\|x(t)\|\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_m[A_R(\tau)]d\tau\right\}-$$

неубывающей. В частности, при $t\geq s$ справедливо неравенство

$$\| x(s)\| \exp\left\{\int\limits_{s}^{t}\lambda_m[A_R(\tau)]d\tau\right\}\leq\| x(t)\|\leq\| x(s)\| \exp\left\{\int\limits_{s}^{t}\lambda_M[A_R(\tau)]d\tau\right\},$$

где $A_R=(A+A^*)/2; \lambda_m[A_R], \lambda_M[A_R]-$ соответственно минимальное и максимальное собственные значения оператора A_R.

Доказательство. Продифференцируем функцию

$$\phi_M^2(t)=(x(t),x(t))\exp\left\{-2\int\limits_{s}^{t}\lambda_M[A_R(\tau)]d\tau\right\}.$$

В результате получим выражение

$$\frac{d\phi_M^2(t)}{dt}=[(x'(t),x(t))+(x(t),x'(t))]\exp\left\{-2\int\limits_{s}^{t}\lambda_M[A_R(\tau)]d\tau\right\}-$$

$$-2(x(t),x(t))\lambda_M[A_R(t)]\exp\left\{-2\int\limits_s^t\lambda_M[A_R(\tau)]d\tau\right\}\leq$$

$$\leq 2\{(A_R(t)x(t),x(t))-\lambda_M[A_R(t)](x(t),x(t))\}\exp\left\{-2\int\limits_s^t\lambda_M[A_R(\tau)]d\tau\right\},$$

из которого в силу неравенства

$$\lambda_m(A_R(t))(x(t),x(t))\leq(A_R(t)x(t),x(t))\leq\lambda_M(A_R(t))(x(t),x(t)),$$

справедливого для самосопряженного оператора A_R, следует,что

$$\frac{d\phi_M^2(t)}{dt}\leq 0.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Второе доказывается аналогично.

Утверждение теоремы 1.3 допускает обобщение на любое банахово пространство B.

Теорема 1.4 [47]. Для любого решения $x(t)$ уравнения (1.7) в банаховом пространстве B справедливо при $t\geq s$ неравенство

$$\| x(s)\|\exp\left\{\int\limits_s^t-\Lambda(-A(\tau))d\tau\right\}\leq\| x(t)\|\leq$$

$$\leq\| x(s)\|\exp\left\{\int\limits_s^t\Lambda(A(\tau))d\tau\right\}, \qquad (1.8)$$

где $\Lambda(A(\tau))-$ логарифмическая норма оператора $A(\tau)$.

Теоремы 1.3 и 1.4 допускают следующие обобщения.

Теорема 1.5. Пусть $K-$ линейный непрерывно обратимый оператор, ограниченный в гильбертовом пространстве H. Тогда при $t\geq s$ для решения $x(t)$ уравнения (1.7) справедливы оценки

$$\|K^{-1}\|^{-1}\|x(s)\|\exp\{\int\limits_0^1\lambda_m[(K^{-1}A(\tau)K)_R]d\tau\leq\|x(t)\|\leq$$

$$\leq\|K\|\|x(s)\|\exp\{\int\limits_0^1\lambda_M[(K^{-1}A(\tau)K)]_R]d\tau\}.$$

Теорема 1.6. Пусть $K \in [B, B], K-$ линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор. Тогда при $t \geq s$ для решения $x(t)$ уравнения (1.7) в банаховом пространстве B справедливы оценки:

$$\|K^{-1}\|^{-1}\|x(s)\|\exp\{\int_0^1 -\Lambda[-K^{-1}A(\tau)K]d\tau\} \leq \|x(t)\| \leq$$

$$\leq \|K\|\|x(s)\|\exp\{\int_0^1 \Lambda[K^{-1}A(\tau)K]d\tau\}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Так как теоремы 1.5 и 1.6 доказываются аналогично, то остановимся на доказательстве теоремы 1.6. Пусть $x(t) = Ky(t)$. Тогда уравнение (1.7) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = K^{-1}A(t)Ky(t),$$

и для него справедливо утверждение теоремы 1.4. Возвращаясь к функции $x(t)$, получаем неравенство (1.9).

Утверждения теорем 1.4 и 1.6 позволяют получить достаточно простые критерии устойчивости и асимптотической устойчивости тривиальных решений систем дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t), \tag{1.10}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Известно, что в банаховых пространствах c (пространство всех сходящихся последовательностей $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup|\xi_i|$) и в l_1 (пространство всех абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|$) логарифмическая норма матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, \infty$, равна соответственно

$$\Lambda(A) = \sup_j\{\mathrm{Re}a_{jj} + \sum_{k\neq j}|a_{jk}|\}, \quad \Lambda(A) = \sup_j\{\mathrm{Re}a_{jj} + \sum_{k\neq j}|a_{kj}|\}.$$

Таким образом в метриках пространств c и l_1 тривиальное решение системы уравнений (1.10) будет устойчиво (асимптотически устойчиво), если при всех $t \in [T, \infty)$, $T = \mathrm{const}$, выполняется условие

$$\int\limits_T^t \{\sup_j \{\mathrm{Re} a_{jj}(\tau) + \sum_{k \neq j} |a_{jk}(\tau)|\}\} d\tau < 0; \tag{1.11}$$

$$\left(\int\limits_T^t (\sup_j \{\mathrm{Re} a_{jj}(\tau) + \sum_{k \neq j} |a_{kj}(\tau)|\}\} d\tau \leq -\alpha, \quad \alpha > 0 \right). \tag{1.12}$$

Существует еще несколько методов исследования устойчивости решений линейных уравнений с переменными коэффициентами. Среди них в первую очередь нужно отметить методы, связанные со старшим и генеральным показателями однородного уравнения на полуоси и с компактными оператор-функциями (см. гл. III монографии [47]).

2. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений

Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений впервые была исследована А. М. Ляпуновым, использовавшим для этого специальные функции, которые получили название функций Ляпунова.

Подробное изложение второго метода Ляпунова, основанного на построении функций Ляпунова, и дальнейшие обобщения этого метода можно найти в монографиях [9], [50], [55], [68], [74], [76], [80]. Не останавливаясь на изложении этого метода, исследуем устойчивость решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t, x(t)). \tag{2.1}$$

Выше отмечалось, что для суждения об устойчивости решений уравнений достаточно изучить вопрос об устойчивости их нулевых решений. Поэтому будем исследовать устойчивость тривиального решения уравнения (2.1) в предположении, что $B(t, 0) \equiv 0$.

Уравнение (2.1) исследуем в предположении, что $A(t)-$ линейный ограниченный оператор, непрерывный по t, а функция $B(t, x(t))$ в области $D : \| x(t) \| \leq H, t_0 \leq t < \infty$ удовлетворяет неравенству

$$\| B(t, x(t)) \| \leq L \| x(t) \| . \tag{2.2}$$

Как и выше, через $U(t,t_0)$ обозначим эволюционный оператор уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t). \tag{2.3}$$

Будем говорить [47], что уравнение (2.3) или оператор $U(t,t_0)$ обладает свойством $B(\alpha,N)$, если найдутся такие вещественные числа α и $N(N>0)$, что

$$\parallel U(t,t_0) \parallel \leq Ne^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1 [47]. Пусть уравнение (2.3) удовлетворяет условию $B(\alpha,N)$ при положительном α, а функция $B(t,x)-$ условию (2.2). Тогда при $\lambda = \alpha - NL > 0$ нулевое решение уравнения (2.1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Выше в разделе 3 главы 1, было показано, что уравнение (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = U(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)B(s,x(s))ds,$$

где $U-$ эволюционный оператор. Переходя в этом уравнении к нормам и используя оценки (2.2) и (2.4), имеем:

$$\parallel x(t) \parallel \leq \parallel U(t,t_0) \parallel \parallel x_0 \parallel + \int\limits_{t_0}^{t} \parallel U(t,s) \parallel B(s,x(s)) \parallel ds \leq$$

$$\leq Ne^{-\alpha(t-t_0)} \parallel x_0 \parallel + \int\limits_{t_0}^{t} NLe^{-\alpha(t-s)} \parallel x(s) \parallel ds. \tag{2.5}$$

Умножим обе части неравенства (2.5) на $e^{\alpha t}$ и введем функцию $\phi(t) =$ $= e^{\alpha t} \parallel x(t) \parallel$. Тогда это неравенство можно переписать в виде

$$\phi(t) \leq Ne^{\alpha t_0} \parallel x_0 \parallel + NL \int\limits_{t_0}^{t} \phi(s)ds.$$

Применяя теперь лемму Гронуолла $-$ Беллмана, получим:

$$\phi(t) \leq e^{NL(t-t_0)} Ne^{\alpha t_0} \parallel x_0 \parallel .$$

Заменяя функцию $\phi(t)$ ее значением $e^{\alpha t}\|x(t)\|$, окончательно имеем:

$$x(t) \leq e^{-(\alpha-NL)(t-t_0)}N \parallel x_0 \parallel .$$

Теорема доказана.

Условие (2.2) можно заменить более общим интегральным неравенством

$$\parallel B(t,x) \parallel \leq \eta(t) \parallel x \parallel \quad (t \geq t_0, \parallel x \parallel \leq \rho), \tag{2.6}$$

где

$$\frac{1}{\tau_0}\int\limits_{t}^{t+\tau_0} \eta(\tau)d\tau \leq q. \tag{2.7}$$

При этом справедлива

Теорема 2.2 [47]. Пусть уравнение (2.1) обладает свойством $B(\alpha, N)$ при положительном α, а функция $B(t, x(t)$ удовлетворяет условиям (2.6)–(2.7) при фиксированном τ_0. Тогда если $q < \alpha/N$, то невозмущенное решение уравнения (2.1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Пусть $\rho_0 < \min(\rho/N_1, \rho)$, где $N_1 = Ne^{Nt_0}$, $\parallel x_0 \parallel < \rho_0$, $x(t)-$ решение уравнения (2.1) с начальным значением $x(t_0)$. Так как $\parallel x_0 \parallel < \rho_0$, найдется такое T, что при $\quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$ $\parallel x(t) \parallel < \rho$.

Уравнение (2.1) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)B(s, x(s))ds. \tag{2.8}$$

По условию теоремы эволюционный оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет неравенству

$$\parallel U(t, t_0) \parallel \leq Ne^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geq t_0).$$

Так как при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ справедливо условие (2.6), переходя в равенстве (2.8) к нормам, имеем:

$$\parallel x(t) \parallel \leq N \parallel x(t_0) \parallel e^{-\alpha(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} Ne^{-\alpha(t-s)}\eta(s) \parallel x(s) \parallel ds. \tag{2.9}$$

Введем функцию $\phi(t) = e^{\alpha t} \parallel x(t) \parallel$. Тогда предыдущее неравенство можно представить в виде

$$\phi(t) \leq N \parallel x(t_0) \parallel e^{\alpha t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} N\eta(s)\phi(s)ds.$$

Применяя теперь неравенство Гронуолла – Беллмана и переходя от $\phi(t)$ к $\| x(t) \|$, получим:

$$\| x(t) \| \leq N_1 \| x_0 \| e^{-(\alpha - Nq)(t-t_0)} \quad (N_1 = Ne^{\alpha t_0}). \tag{2.10}$$

Из этой оценки и условий $\| x(t_0) \| = \| x_0 \| < \rho_0$, $\rho_0 < \min(\rho/N_1, \rho)$ следует, что

$$\| x(t) \| \leq N_1 \rho_0 e^{-(\alpha - Nq)(t-t_0)} < \rho e^{-(\alpha - Nq)(t-t_0)}.$$

Значит $\| x(t) \| \leq \rho$ при всех $T > 0$. Поэтому неравенство (2.9) справедливо при всех $t \geq t_0$, а значит, при всех $t \geq t_0$ справедлива оценка (2.10). Теорема доказана.

3. Устойчивость решений разностных уравнений

3.1. Линейные уравнения

Рассмотрим в банаховом пространстве B линейное разностное уравнение

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n) \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$x(n_0) = x_0. \tag{3.2}$$

Уравнению (3.1) соответствует однородное уравнение

$$x(n+1) = Ax(n). \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть, что решением уравнения (3.3) при начальном значении (3.2) является операторная функция

$$x(n+1) = A^{n+1-n_0} x_0. \tag{3.4}$$

Определение 3.1. Невозмущенное решение уравнения $x(n+1) = A(x(n))$, где $A-$ нелинейный оператор, $A(0) = 0$, называется устойчивым по Ляпунову, если для любого как угодно малого $\epsilon(\epsilon > 0)$ найдется такое $\delta(\delta(\epsilon))$, что при $\| x(n_0) \| < \delta \quad \| x(n) \| < \epsilon$ для всех $n \geq n_0$.

Определение 3.2. Невозмущенное решение уравнения $x(n+1) = A(x(n))$, где $A-$ нелинейный оператор, $A(0) = 0$, называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и $\lim\limits_{n \to \infty} \|x(n)\| = 0$.

Из определений 3.1, 3.2 и функции (3.4) следует, что устойчивость решений уравнения (3.3) зависит от $\| A^n \|$. Приведем некоторые оценки этой нормы.

Оценим $\| A^n \|$ в гильбертовом пространстве H. Известно [44], что в гильбертовом пространстве H линейный, вполне непрерывный оператор A может быть представлен в виде $A = UT$, где $T-$ положительный квадратный корень из A^*A; $U-$ частично изометрический оператор, отображающий область значений оператора T на H. Тогда

$$\| Ax \| = (Ax, Ax)^{1/2} = (UTx, UTx)^{1/2} = (Tx, Tx)^{1/2} = \| Tx \| \leq$$

$$\leq \max_j s_j \| x \|,$$

где $s_j - s$-числа оператора A, т. е. собственные значения оператора T. Из этой оценки следует, что $\| A^n \| \leq s_*^n$, где $s_* = \max_j s_j$.

Лемма 3.1. В гильбертовом пространстве H для линейного, вполне непрерывного оператора A справедлива оценка $\| A^n \| \leq s_*^n$, где s_*- максимальное из s чисел оператора A.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H произвольный линейный оператор A и предположим, что существует оператор $\ln A$. Известно [47], что для этого достаточно, чтобы спектр оператора A не содержал начало координат.

Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = (A^t, A^t) = \left(e^{(\ln A)t}, e^{(\ln A)t}\right).$$

Продифференцируем $\phi(t)$ по t. Тогда

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \left((\ln A)e^{(\ln A)t}, e^{(\ln A)t}\right) + \left(e^{(\ln A)t}, (\ln A)e^{(\ln A)t}\right) =$$

$$= ([\ln A + (\ln A)^*]e^{(\ln A)t}, e^{(\ln A)t}) =$$

$$= ([\ln A + (\ln A)^*]A^t, A^t) \leq \lambda_M(\ln A + (\ln A^*))\phi(t),$$

где λ_M- наибольшее собственное значение оператора $(\ln A + (\ln A)^*)$.

Проинтегрировав это неравенство, получим:

$$\phi(t) \leq C \exp\{\lambda_M(\ln A + (\ln A)^*)t\}.$$

Так как $\phi(0) = 1$, окончательно имеем

$$\| A^n \| \leq \exp\{\max \sigma(\mathrm{Re}(\ln A))n\}.$$

Лемма 3.2. Пусть нуль не принадлежит спектру оператора A. Тогда в гильбертовом пространстве H справедлива оценка

$$\| A^n \| \leq \exp\{\max \sigma(\mathrm{Re}(\ln A))n\}.$$

В монографии [47] показано, что $\| e^{At} \| \leq e^{\Lambda(A)t}$.

Следствие. Справедлива оценка

$$\| A^n \| \leq e^{\Lambda(\ln A)n},$$

которая будет использована ниже.

Располагая этими оценками, можно заняться исследованием устойчивости неоднородных разностных уравнений. Остановимся вначале на линейных уравнениях вида

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n); \tag{3.5}$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n), \tag{3.6}$$

где A и $A(n)-$ линейные ограниченные операторы в соответсвующих пространствах.

Заменой $x(n) = y(n) + x^*(n)$, где x^*- решение уравнения (3.5) или (3.6), уравнение (3.5) или (3.6) сводится к уравнению

$$y(n+1) = Ay(n) \tag{3.7}$$

или

$$y(n+1) = A(n)y(n), \tag{3.8}$$

и исследование устойчивости решений уравнений (3.5) и (3.6) эквивалентно исследованию устойчивости нулевых решений уравнений (3.7) и (3.8).

Исследуем устойчивость нулевого решения уравнения (3.7). Для этого дадим начальному значению $y(n_0)$ некоторое возмущение, положив $y(n_0)$ равным y_0. (В нулевом решении $y(n_0)$ было, конечно, равно нулю). Выше уже отмечалось, что решение уравнения (3.7) с начальным значением

$$y(n_0) = y_0 \tag{3.9}$$

имеет вид $y(n) = A^{n-n_0}y_0$. Следовательно, $\|y(n)\| \leq \|A^{n-n_0}\|\|y_0\|$. Если воспользоваться утверждением теоремы 1.3 главы 1, то $\| y(n) \| \leq$ $\leq N\rho^{n-n_0} \| y_0 \|$, где $\rho = \max \mid \sigma(\mathrm{A}) \mid$; $N-$ константа, зависящая лишь от ρ, т. е. от оператора A. Если $\rho < 1$, то $\rho^{n-n_0} \to 0$ при $n - n_0 \to \infty$ и выбором y_0 можно всегда добиться того, чтобы $N \parallel y_0 \parallel < \epsilon$. Отсюда следует, что $\parallel y(n) \parallel < \epsilon$ при всех $n \geq n_0$. Так как $\rho^{n-n_0} \to 0$ при $\rho < 1$ и $n - n_0 \to \infty$, $\parallel y(n) \parallel \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Пусть спектр оператора A расположен внутри окружности с радиусом единица и центром в начале координат. Тогда решение уравнения (3.7) асимптотически устойчиво.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости решения уравнения (3.8) в гильбертовом пространстве H. Для этого рассмотрим задачу Коши (3.8), (3.9). Непосредственной проверкой можно показать, что оператор-функция

$$y(n) = A(n-1)A(n-2)\dots A(n_0)y_0 \tag{3.10}$$

является решением этой задачи. Перейдя в (3.10) к нормам получим

$$\parallel y(n) \parallel \leq \parallel A(n-1) \parallel \parallel A(n-1) \parallel \dots \parallel A(n_0) \parallel \parallel y_0 \parallel .$$

В лемме 3.1 показано, что $\parallel A(n) \parallel \leq \mu(n)$, где $\mu(n)-$ максимальное из s-чисел оператора $A(n)$.

Поэтому

$$\parallel y(n) \parallel \leq \Pi_{k=n_0}^{n-1} \mu(k) \parallel y_0 \parallel .$$

Если при всех $n \geq n_0$ $\Pi_{k=n_0}^{n-1} \mu(k) \leq C = \text{const}$, то выбором x_0 можно добиться того, чтобы $\parallel y(n) \parallel$ была меньше любого как угодно малого ϵ. Из этого утверждения следует устойчивость решения. Если же, кроме того, при всех достаточно больших n $\mu(n) \leq q < 1$, то нулевое решение уравнения (3.8) асимптотически устойчиво.

Теорема 3.2. Пусть при каждом $n \geq n_0$ оператор $A(n)-$ линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Если для $\forall n \geq n_0$ $\Pi_{k=n_0}^{n} \mu(k) \leq C = \text{const}$, то нулевое решение уравнения (3.8) устойчиво. Если, кроме того, при достаточно больших n $\mu(n) \leq q < 1$, то нулевое решение уравнения (3.8) асимптотически устойчиво.

Теорема 3.3. Пусть при каждом $n \geq n_0$ оператор $A(n)-$ линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве B. Нулевое решение уравнения (3.8) будет устойчиво, если

$$\Pi_{k=n_0}^{n} e^{\Lambda(\ln A(k))} \leq C = \text{const}$$

или, что то же самое, если

$$\sum_{k=n_0}^{n} \Lambda(\ln A(k)) \leq C = \text{const}.$$

Нулевое решение уравнения (3.8) будет асимптотически устойчиво, если при всех достаточно больших n $\Lambda(\ln A(n)) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0.$

Рассмотрим уравнение (3.7). Известно, что если хотя бы одно собственное значение аператора A по модулю больше единицы, то тривиальное решение уравнения (3.7) неустойчиво.

3.2. Нелинейные уравнения

Рассмотрим нелинейные уравнения вида

$$x(n+1) = Ax(n) + B(n, x(n)), \tag{3.11}$$

где $A-$ линейный; $B(n, x(n))-$ нелинейный операторы. Будем считать, что $B(n, 0) = 0$, т. е. уравнение (3.11) имеет нулевое решение. Кроме того, предположим, что спектр оператора A расположен внутри единичной окружности:

$$\rho = \max \mid \sigma(A) \mid = q < 1. \tag{3.12}$$

На оператор $B(n, x(n))$ наложим ограничение

$$\| B(n, x(n)) \| \leq L \| x(n) \| . \tag{3.13}$$

Из теоремы 1.3 главы 1 следует, что $\| A^n \| \leq N\rho^n$. Об устойчивости нулевого решения уравнения (3.11) позволяет судить

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия (3.12) и (3.13). Тогда если $q + LN < 0$, то решение уравнения (3.11) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Нетрудно видеть, что решение уравнения (3.11) можно представить в виде

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} B(k-1, x(k-1)).$$

Перейдем в этом равенстве к нормам. Будем иметь

$$\| x(n) \| \leq \| A^n \| \| x(0) \| + \sum_{k=1}^{n} \| A^{n-k} \| \| B(k-1, x(k-1)) \| .$$

Воспользуемся теперь условиями (3.12) и (3.13):

$$\| x(n) \| \leq Nq^n \| x(0) \| + N \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} L \| x(k-1) \| .$$

Введем новую функцию $\varphi(n) = q^{-n} \parallel x(n) \parallel$. Тогда предыдущее неравенство можно записать в виде

$$\varphi(n) \leq N \parallel x(0) \parallel + \sum_{k=1}^{n} \frac{NL}{q}\varphi(k-1).$$

Применяя теперь лемму 1.6 предыдущей главы, и возвращаясь к нормам, убеждаемся в справедливости теоремы.

Рассмотрим систему уравнений

$$x_k(n+1) = A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n)), \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{3.14}$$

где $A_k(n, 0, \ldots, 0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, l$, $n = 0, 1, \ldots$.

Пусть при некотором значении n все компоненты вектора $X(n) = (x_1(n), \ldots, x_l(n))$ отличны от нуля. Представим функцию $A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))$ в следующем виде:

$$A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n)) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \frac{A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))}{x_j(n)} x_j(n),$$

где $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$, $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые компоненты вектора $X(n)$ равны нулю.

В этом случае функцию $A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))$ представим в виде

$$A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n)) = \sum_{j=1}^{l}{}^{*} \alpha_{kj}^{*} \frac{A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))}{x_j(n)} x_j(n),$$

где $\alpha_{kj}^{*} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{l}{}^{*} \alpha_{kj}^{*} = 1$, $\sum_{j=1}^{l}{}^{*}$ означает суммирование по j таким, что $x_j(n) \neq 0$.

При этих предположениях систему уравнений (3.14) можно представить в виде

$$x_k(n+1) = \sum_{j=1}^{l}{}^{*} \alpha_{kj}^{*} \frac{A_k(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))}{x_j(n)} x_j(n). \tag{3.15}$$

Систему уравнений (3.15) более удобно записать следующим образом:

$$x_k(n+1) = \sum_{j=1}^{l} B_{kj}(n, X(n)) x_j(n). \tag{3.16}$$

Поставим каждому вектору $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ в соответствие множество матриц $C(n, \Gamma) = \{c_{ij}(n, \Gamma)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, l$, где

$$c_{ij}(n, \Gamma) = \sum_{j=1}^{l}{}^{*} \alpha_{ij}^{*} \frac{A_i(n, \gamma_1, \dots, \gamma_l)}{\gamma_j}.$$

Здесь $\sum^{*}$ и α_{ij}^{*} определены как и выше.

Теорема 3.5. Пусть выполнены следующие условия:

1) $A_k(n, 0, \dots, 0) \equiv 0$ при $k = 1, 2, \dots, l$, $n = 0, 1, \dots$;

2) среди множества матриц $C(n, \Gamma)$ существует матрица $\bar{C}(n, \Gamma)$, определяемая набором коэффициентов α_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, l$, такая, что для любого элемента $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ из окрестности начала координат (но не включая начало координат) выполняется одно из двух неравенств:

а) $s(n) = \max\limits_{j} s_j(n) \le 1 (\le \beta < 1)$, где $s_j(n) - s$-числа матрицы $\bar{C}(n, \Gamma)$;

б) $\Lambda(\ln \bar{C}(n, \Gamma)) < 0$ $(\le -\alpha, \alpha > 0)$.

Тогда тривиальное решение системы уравнений (3.14) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Доказательство будем проводить в пространствах R_l, l-мерных векторов $x = (x_1, \dots, x_l)$.

Пусть в начальный момент (при $n = 0$) вектор $X(0)$ имеет норму $\|X(0)\| = \delta_0$. Покажем, что траектория $X(1)$, $X(2), \dots, X(n), \dots$, не покидает сферы $R(0, \delta_0)$. Для этого достаточно при каждом фиксированном значении n, $n = 0, 1, \dots$, представить систему уравнений (3.14) в виде (3.16) и воспользоваться теоремами 3.2 или 3.3.

Теорема доказана.

4. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

Рассмотрим в банаховом пространстве B нелинейное операторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)), \quad A(t, 0) \equiv 0. \tag{4.1}$$

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (4.1). Зададим начальное возмущение

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in B, \tag{4.2}$$

и рассмотрим задачу Коши (4.1), (4.2).

Теорема 4.1. Предположим, что в некотором шаре $R(0,\delta)$ B пространства выполнено условие: для любого $(T > 0)$ и любого $z \in R(0,\delta)$ найдется такой линейный оператор $L(T,z)x$, что:

1) логарифмическая норма оператора $\Lambda(L(T,z)) < 0$ $(\Lambda L(T,z) \leq \leq -\alpha, \alpha > 0)$;

2) для любого как угодно малого $\epsilon(\epsilon > 0)$ существует такая окрестность $\delta_1(\epsilon)$ и такое значение $\Delta T(\epsilon)$ (для каждой точки z свое), что при $\|x(T) - z\| \leq \delta_1$ и $t \in [T, T + \Delta T]$ справедливо неравенство

$$\|A(t,x(t)) - L(T,z)x(t)\| < \epsilon.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (4.1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени T_0 траектория $x(t)$ задачи Коши (4.1), (4.2) покидает сферу $S(0,\delta)$ $(\|x_0\| < \delta)$, проходя через точку $z \in B$. По условиям теоремы найдется оператор $L(T_0,z)$, удовлетворяющий условиям 1), 2).

Представим уравнение (4.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = L(T_0,z)x + F(x), \tag{4.3}$$

где $F(x) = A(t,x(t)) - L(T_0,z)x(t)$.

Так как $z \neq 0$, то из условия 2) теоремы следует, что найдется такой интервал времени ΔT^*, что при $t \in [T_0, T_1]$, $T_1 = T_0 + \Delta T^*$

$$\|F(x)\| \leq \epsilon \|x(t)\|. \tag{4.4}$$

Решение уравнения (4.3) при $t \geq T_0$ можно представить в виде

$$x(t) = e^{L(T_0,z)(t-T_0)}x(T_0) + \int\limits_{T_0}^{t} e^{L(T_0,z)(t-\tau)}F(\tau)d\tau. \tag{4.5}$$

Переходя в (4.5) к нормам и учитывая неравенство (4.4), в промежутке времени $[T_0, T_1]$ приходим к неравенству

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(L(T_0,z))(t-T_0)}\|x(T_0)\| + \epsilon \int\limits_{T_0}^{t} e^{\Lambda(L(T_0,z))(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau \leq$$

$$\leq e^{-\alpha(t-T_0)}\|x(T_0)\| + \epsilon \int\limits_{T_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau. \tag{4.6}$$

Умножая обе части предыдущего неравенства на $e^{-\alpha t}$, приходим к неравенству:

$$0 \le \psi(t) \le e^{\alpha T_0}\|x(T_0)\| + \epsilon \int\limits_{T_0}^{t} \psi(\tau)d\tau, \tag{4.7}$$

где $\psi(t) = e^{\alpha t}\|x(t)\|$.

Применяя к (4.7) неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем в промежутке времени $[T_0, T_1]$:

$$\|x(t)\| \le e^{-(\alpha-\epsilon)(t-T_0)}\|x(T_0)\|. \tag{4.8}$$

Следовательно, траектория $x(t)$ не покидает сферы $S(0,\delta)$ и устойчивость доказана.

Докажем теперь асимптотическую устойчивость. Зафиксируем произвольное $\epsilon(\epsilon > 0, \epsilon < \alpha/2)$. По аналогии с проведенными выше рассуждениями построим последовательность точек $T_0, T_1, \ldots, T_n, \cdots$ такую, что

$$\|x(t)\| \le e^{-(\alpha-\epsilon)(t-T_k)}\|x(T_k)\|, \quad t \in [T_k, T_{k+1}]. \tag{4.9}$$

Здесь имеются две возможности:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T^*$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Рассмотрим первую возможность. Очевидно, при $t \in [T_0, T^*]$ справедливо неравенство (4.9). Если при этом $\|x(T^*)\| = 0$, то теорема доказана. Предположим противное. Пусть $\|x(T^*)\| \ne 0$. Взяв $x(T^*)$ за начальное приближение, убеждаемся, что существует промежуток времени $[T^*, T^* + \Delta T^*]$, в течение которого выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \le e^{-(\alpha-\varepsilon)(t-T^*)}\|x(T^*)\|.$$

Тогда это неравенство или выполняется при всех $t \in [T^*, \infty)$, или существует момент времени T^{**}, в который это неравенство нарушается, что невозможно, так как выше было показано, что существует промежуток времени $[T^{**}, T^{**} + \Delta T^{**}]$, в течение которого справедливо неравенство $\|x(t)\| \le e^{-(\alpha-\varepsilon)(t-T^*)}\|x(T^*)\|$.

Если неравенство (4.9) выполняется при всех $t \ge T^*$, то или $\|x(t)\| \to \to 0$ при $t \to \infty$, или существует момент времени T_*, при котором $\|x(T_*)\| = 0$. В обоих случаях имеет место асимптотическая устойчивость.

Во втором случае стремление $x(t)$ к 0 при $t \to \infty$ очевидно.

Теорема доказана.

Замечания. 1. В случае если исследование устойчивости проводится в гильбертовом пространстве, то условие 1) нужно заменить на следующее:

1. $\mathrm{Re}(L(T,z)) < 0$ $(\mathrm{Re}(L(T,z)) \le -\alpha, \alpha > 0)$, где $\mathrm{Re}(L(T,z)) =$ $= (L(T,z) + L(T,z)^*)/2$.

2. Аналогичного типа утверждения справедливы и для разностных уравнений.

Приведем еще один критерий устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве B.

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (4.1).

Пусть $K \in [B,B]-$ линейный ограниченный оператор, имеющий линейный обратный оператор K^{-1}.

Введем новую неизвестную функцию $z(t)$ по формуле $x(t) = Kz(t)$ и представим уравнение (4.1) в виде

$$\frac{dz}{dt} = K^{-1}A(t, Kz(t)). \tag{4.10}$$

При этом данные Коши имеют вид

$$z(t_0) = K^{-1}x(t_0). \tag{4.11}$$

Оператор $K^{-1}A(t,Kz(t))$ можно представить следующим образом:

$$K^{-1}A(t,Kz(t)) = (\int\limits_0^1 K^{-1}A_2'(t,\tau Kz(t))d\tau)Kz(t) =$$

$$= K^{-1}(\int\limits_0^1 A_2'(t,\tau Kz(t))d\tau)Kz(t),$$

где $A_2'(t,u)-$ производная Фреше по переменной u.

Зафиксируем произвольное достаточно малое $\epsilon(\epsilon > 0)$. Пусть $v-$ произвольный элемент сферы $S(0,\delta)$.

Предположим, что логарифмическая норма оператора $K^{-1}A_*(t,v)K$ при всех $t \in [t_0,\infty)$ и $v \in S(0,\delta)$ удовлетворяет условиям:

а) $\Lambda(K^{-1}A_*(t,v)K) < 0$;

б) $\Lambda(K^{-1}A_*(t,v)K) \le -\alpha$, $\alpha > 0$.

Здесь $A_*(t,v) = \int\limits_0^1 A_2'(t,\tau Kv)d\tau$.

Теорема 4.2. Пусть функция $A(t,u)$ непрерывна по t при $t_0 \leq t \leq \infty$. Тривиальное решение уравнения (4.1) устойчиво, если выполнено условие а) и асимптотически устойчиво, если выполнено условие б).

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия а) тривиальное решение уравнения (4.10) устойчиво, а при выполнении условия б) асимптотически устойчиво.

Вначале исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (4.10). Доказательство устойчивости проведем от противного. Пусть начальное значение z_0 уравнение (4.10) лежит внутри сферы $S(0,\delta)$. Покажем, что решение задачи Коши (4.10) – (4.11) не покидает сферы $S(0,\delta)$. Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория решения задачи Коши (4.10) – (4.11) покидает сферу $S(0,\delta)$, проходя через точку $v = z(T)$. Тогда при $t \geq T$ уравнение (4.10) можно представить в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = K^{-1}A_*(T,v)Kz(t) + K^{-1}(\int_0^1 (A_2'(t,\tau Kz(t)) - A_2'(T,\tau Kv))d\tau Kz(t) =$$

$$= K^{-1}A_*(T,v)Kz(t) + g(t,T)z(t).$$

Решение этого уравнения имеет при $t \geq T$ вид

$$z(t) = \exp\{(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K})(\mathrm{t}-\mathrm{T})\}\mathrm{z}(\mathrm{T}) +$$

$$+\int_T^t \exp\{(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K})(\mathrm{t}-\mathrm{s})\}\mathrm{g}(\mathrm{s},\mathrm{T})\mathrm{z}(\mathrm{s})\mathrm{ds}. \qquad (4.12)$$

Из непрерывности оператора $A(t)$ следует, что для любого как угодно малого ϵ ($\epsilon > 0$) существует такое ΔT, что в промежутке времени t ($T \leq t \leq T + \Delta T$) справедливо неравенство $\|g(t,T)\| \leq \epsilon$.

Переходя в уравнении (4.12) к нормам, имеем:

$$\|z(t)\| \leq \|\exp\{(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K})(\mathrm{t}-\mathrm{T})\}\|\|\mathrm{z}(\mathrm{T})\| +$$

$$+\int_T^t \|\exp\{(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K})(\mathrm{t}-\mathrm{s})\}\|\epsilon\|\mathrm{z}(\mathrm{s})\|\mathrm{ds} \leq$$

$$\leq \exp\{\Lambda(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K})(\mathrm{t}-\mathrm{T})\}\|\mathrm{z}(\mathrm{T})\| +$$

$$+\int_T^t \|\exp\{\Lambda(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K})(\mathrm{t}-\mathrm{s})\}\|\epsilon\|\mathrm{z}(\mathrm{s})\|\mathrm{ds}. \qquad (4.13)$$

Умножим обе части предыдущего неравенства на $\exp\{-(K^{-1}A_*(T,v)K)t\}$.

В результате приходим к уравнению

$$\varphi(t) = \varphi(T) + \int\limits_T^t \varepsilon\varphi(s)ds. \tag{4.14}$$

Здесь $\varphi(t) = \exp\{\Lambda(K^{-1}A_*(T,v)K)t\}\|z(t)\|$.

Применив к (4.14) неравенство Гронуолла – Беллмана, приходим к неравенству:

$$\varphi(t) \leq e^{\epsilon(t-T)}\varphi(T)$$

и, возвращаясь к $\|z(t)\|$, имеем:

$$\|z(t)\| \leq \exp\{\Lambda(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}_*(\mathrm{T},\mathrm{v})\mathrm{K}) + \epsilon)(\mathrm{t}-\mathrm{T})\}\|\mathrm{z}(\mathrm{T})\|. \tag{4.15}$$

Так как по условию теоремы $\Lambda(K^{-1}A_*(T,v)K) < 0$, то найдется такое ϵ, что $\Lambda(K^{-1}A_*(T,v)K) + \epsilon < 0$ при $t \in [T, T+\Delta T]$. Следовательно, при данных значениях t траектория решения уравнения (4.10) не выходит из сферы $S(0,\delta)$, и, тем самым, доказана устойчивость тривиального решения уравнения (4.10).

Доказательство асимптотической устойчивости проводится по аналогии с доказательством, приведенным в предыдущей теореме.

Приведем простой пример практического применения теоремы 4.2.

Пример. Рассмотрим систему Лоренца

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t);$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \tau x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t);$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -bx_3(t) - x_1(t)x_2(t).$$

Сделаем замену $x_i(t) = \alpha_i y_i(t), \alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,3$. В результате имеем

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -\sigma y_1(t) + \sigma\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(t);$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \tau\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y_1(t) - y_2(t) - \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}y_1(t)y_3(t);$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = -by_3(t) - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}y_1(t)y_2(t).$$

Для устойчивости последней системы достаточно выполнение условий: $\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| < 1$; $\left|\tau\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| < 1$; $\alpha_3 = 1$; $b > 0$; $\sigma > 0$. Отсюда следует, что система Лоренца будет устойчива при следующих значениях параметров:

$$\sigma > 0;\ |\tau| < 1;\ b > 0.$$

Нетрудно видеть, что устойчивое решение системы Лоренца не выходит из эллипсоида $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + x_3^2 = \delta^2$, где α_1 и α_2– произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенству $|\alpha_1/\alpha_2| < 1$. При этом естественно взять одно из них равным единице.

5. Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом разделе критерии устойчивости, предложенные в разделе 4 для дифференциальных уравнений в B-пространствах, конкретизируются для систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)); \tag{5.1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{5.2}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, $A(t, x(t)) = (A_1(t, x(t)), \cdots, A_n(t, x(t)))$.

Будем считать, что $A(t, 0) \equiv 0$ и что функции $A_i(t, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывны по всем аргументам.

Исследование будем проводить в пространстве R_n – n-мерных векторов. В качестве нормы в пространстве R_n можно взять одну из следующих норм:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|;\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|;\ \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2}.$$

Так как исследование устойчивости проводится совершенно аналогично в каждом их этих пространств, то в данном разделе не конкретизируется норма.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R_n$, $\|\gamma\| \ne 0$, $T (t_0 \le T < \infty)$– фиксированный момент времени.

Введем матрицу

$$B(T, \gamma) = b_{ij}(T, \gamma), i, j = 1, 2, \dots, n,$$

элементы которой имеют вид

$$b_{ij}(T,\gamma) = \begin{cases} \alpha_{ij}\frac{A_i(T,\gamma_1,\ldots,\gamma_{j-1},\gamma_j,\gamma_{j+1},\ldots,\gamma_n)}{\gamma_j}, & \gamma_j \neq 0, \\ 0, & \gamma_j = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

где $\alpha_{ij} \geq 0$, причем $\alpha_{ij} = 0$, если $\gamma_j = 0$, и $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$.

Замечание. Возможны и другие способы определения матрицы $B(T,\gamma)$. Ряд из них будет приведен в следующих разделах книги. Здесь опишем еще один вид матриц $B(T,\gamma)$:

$$b_{ij}(T,\gamma) = \begin{cases} \alpha_{ij}\frac{A_i(T,0,\ldots,0,\gamma_j,\gamma_{j+1},\ldots,\gamma_n)-A_i(T,0,\ldots,0,\gamma_{j+1},\ldots,\gamma_n)}{\gamma_j}, & \gamma_j \neq 0, \\ 0, & \gamma_j = 0, \end{cases}$$

где на α_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$ налагаются те же условия, что и в формуле (5.3). Отметим также, что можно ввести коэффициенты α_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$, зависящие от T и γ. Однако это усложняет изложение, и поэтому на таких конструкциях останавливаться не будем.

Теорема 5.1. Пусть $\delta-$ достаточно малое положительное число, $A_i(t,0) \equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, функции $A_i(t,u_1,\ldots,u_n)$, $i = 1,2,\ldots,n$, непрерывны по всем аргументам. Пусть для любого γ, $0 < \|\gamma\| \leq \delta$ и для любого T, $t_0 \leq T < \infty$, выполнено условие

$$\Lambda(B(T,\gamma)) < 0 \quad (\Lambda(B(T,\gamma)) < -\alpha, \alpha > 0).$$

Тогда тривиальное решение системы уравнений (5.1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Пусть $\|x_0\| < \delta$. Покажем, что при выполнении условий теоремы траектория решения задачи Коши (5.1)$-$(5.2) не покидает шара $R(0,\delta)$ с центром в точке $\theta = (0,\ldots,0)$ и с радиусом δ. Предположим противное. Пусть в момент время T траектория решения задачи Коши (5.1)$-$(5.2) находится на сфере $S(0,\delta)$ в точке $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ и при $t > T$ покидает шар $R(0,\delta)$. Представим систему уравнений (5.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = B(T,\gamma)x(t) + G(t,T,x(t),\gamma), \tag{5.4}$$

где $G(t,T,x(t),\gamma) = (g_1(t,T,x(t),\gamma),\ldots,g_n(t,T,x(t),\gamma))$.

Нетрудно видеть, что из непрерывности функций $A_i(t,u_1,\ldots,u_n)$ по всем переменным следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой промежуток времени ΔT, что при $t \in [T,T+\Delta T]$

$$\|G(t,T,x(t),\gamma)\| \leq \varepsilon\|x(t)\|. \tag{5.5}$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 4.1, из которой следует устойчивость (при $\Lambda(B(T,\gamma)) < 0$) и асимптотическая устойчивость (при $\Lambda(B(T,\gamma)) < -\alpha, \alpha > 0$) тривиального решения задачи Коши (5.1)–(5.2).

Теорема доказана.

В работе [124] продольное движение самолета моделируется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = -\rho_s x_s + \sigma, \quad s = 1, 2, 3, 4;$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + r\rho_2\sigma - f(\sigma), \tag{5.6}$$

где

$$\rho_s > 0; \quad r\rho_2 < 0; \quad 0 < \sigma f(\sigma); \quad f(0) = 0; \tag{5.7}$$

r и $\beta_i (i = 1, 2, 3, 4)$– вещественные параметры.

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (5.6) при условиях (5.7).

Исследование устойчивости системы (5.6) будем проводить в пространстве R_5 векторов $v = (v_1, \ldots, v_5)$ с нормой $\|v\| = \max\limits_{1 \le i \le 5} |v_i|$.

Представим систему уравнений (5.6) в следующем виде:

$$\frac{dx_s}{dt} = -\rho_s x_s + \sigma, \quad s = 1, 2, 3, 4 :$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + r\rho_2\sigma - f^*(\sigma)\sigma, \tag{5.8}$$

где

$$f^*(\sigma) = \begin{cases} \frac{f(\sigma)}{\sigma}, \ \sigma \neq 0, \\ 0, \ \sigma = 0. \end{cases}$$

Используя утверждение теоремы 5.1, приходим к следующему заключению.

Теорема 5.2. Пусть в сфере $B(0,\delta)$, $\delta > 0$, выполнены условия (5.7) и, кроме того, $\rho_s > 1$, $s = 1, 2, 3, 4$,

$$r\rho_2 - f^*(\sigma) + \sum_{i=1}^{4} |\beta_i| \le -\chi, \quad \chi > 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (5.6) асимптотически устойчиво.

В системе уравнений (5.6) сделаем замену переменных $x_s = \gamma_s y_s$, $s = = 1, 2, 3, 4$, $\sigma = \gamma_5 \tau$. В результате получаем систему

$$\frac{dy_s}{dt} = -\rho_s y_s + \frac{\gamma_5}{\gamma_3}\tau, \quad s = 1, 2, 3, 4;$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_i \gamma_i}{\gamma_5} y_i + r\rho_2 \tau - \frac{1}{\gamma_5} f(\gamma_5 \tau). \tag{5.9}$$

Представим систему уравнений (5.9) в виде

$$\frac{dy_s}{dt} = -\rho_s y_s + \frac{\gamma_5}{\gamma_3}\tau, \quad s = 1, 2, 3, 4;$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_i \gamma_i}{\gamma_5} y_i + r\rho_2 \tau - \frac{1}{\gamma_5} f^{**}(\gamma_5 \tau)\tau, \tag{5.10}$$

где

$$f^{**}(\gamma_5 \tau) = \begin{cases} \frac{f(\gamma_5 \tau)}{\tau}, \ \tau \neq 0 \\ 0, \ \tau = 0. \end{cases}$$

Теорема 5.3. Пусть в сфере $B(0, \delta)$, $\delta > 0$, выполнены условия (5.7) и, кроме того, существуют такие параметры γ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, при которых выполняются неравенства

$$-\rho_s + \left|\frac{\gamma_5}{\gamma_3}\right| \leq -\chi;$$

$$-\frac{1}{\gamma_5} f^{**}(\gamma_5 \tau) + r\rho_2 + \sum_{i=1}^{4} \left|\frac{\beta_i \gamma_i}{\gamma_5}\right| \leq -\chi;$$

$$\chi > 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (5.9) асимптотически устойчиво.

6. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с последействием

Устойчивость решений дифференицальных уравнений с последействием исследовалась многими авторами [12], [67], [83], [90], [93].

В разделах 4, 5 данной главы предложен метод исследования устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на вычислении логарифмических норм специальным образом построенных матриц.

Эти результаты распространяются на случай систем дифференциальных уравнений с последействием. Приводимые критерии устойчивости справедливы как в критических случаях, так и при их отсутствии.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(x_1(t-h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t-h_{in}(t))), \qquad (6.1)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

В качестве начального значения возьмем $t_0 = 0$. Будем считать функции $h_{ij}(t)$ непрерывными при $t \geq t_0$. Кроме того, будем считать, что при $t_0 \leq t < \infty$ $0 \leq \max h_{ij}(t) \leq H$, $H > 0$. При $t \in [t_0 - H, t_0)$ значения $x_i(t)$ определяются непрерывными функциями $\varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через r_0 число $r_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in [t_0 - H, t_0]} |\varphi_i(t)|$.

Начальные данные запишем в виде вектора

$$x^0(t_0 + 0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0). \qquad (6.2)$$

Начальную задачу (6.1) − (6.2) будем исследовать в n-мерном пространстве R_n.

Будем считать выполненными условия:

1)$A_i(0, \ldots, 0) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$;

2) при $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ функции $A_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны.

Пусть $x(t)-$ решение задачи Коши (6.1) − (6.2). Обозначим через $(s_1(r), \ldots, s_n(r))$ точки, лежащие на сфере $S(0, r)$. Зафиксируем произвольную матрицу $C = \{c_{ij}\}, i, j = 1, 2, \ldots, n, c_{ij} = \text{const}$. Пусть векторы $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}), i = 1, 2, \ldots, n$, составленные из строк матрицы C, лежат внутри и на сфере $S(0, r)$.

Введем обозначения $B(C, r) = \{b_{ij}(C, r)\}, i, j = 1, 2, \ldots, n$,
где

$$b_{ij}(C, r) = \begin{cases} \dfrac{A_i(c_{i1}, \ldots, c_{in})}{m s_j(r)}, & s_j(r) \neq 0; \\ \quad 0, & s_j(r) = 0, \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$, где $m-$ число отличных от нуля элементов вектора $(s_1(r), \cdots, s_n(r))$.

Теорема 6.1 [20]. Пусть при любой не нулевой матрице $C = \{c_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ с элементами c_{ij}, такими, что вектор $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}), i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежит шару $R(0, r)$ пространства R_n с радиусом $r > r_0$, выполнено условие $\Lambda(B(C,r)) \le 0 \quad (\Lambda(B(C,r)) \le -\alpha, \alpha = \mathrm{const} > 0)$. Тогда тривиальное решение системы уравнений (6.1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $r_1(r_0 < r_1 < r)$ и покажем, что при выполнении условий теоремы каждое решение системы уравнений (6.1), имеющее начальное значение $x(0) = x_0$, расположенное в шаре $R(0, r_1)$, не покинет этого шара. Предположим противное: пусть при $t = T$ траектория решения $x(t)$ системы уравнений (6.1) покидает шар $R(0, r_1)$.

Зафиксируем значения $a_{ij}(T) = x_j(T - h_{ij}(T))$. Представим $A_i(a_{ij}(T), \ldots, a_{in}(T))$ в виде

$$A_i(a_{i1}(T), \ldots, a_{in}(T)) =$$
$$= \frac{A_i(a_{i1}(T), a_{i2}(T), \ldots, a_{in}(T))}{mx_1(T)} x_1(t) + \ldots +$$
$$+ \frac{A_i(a_{i1}(T), \cdots, a_{in}(T))}{mx_n(T)} x_n(t) -$$
$$- \frac{A_i(a_{i1}(T), a_{i2}(T), \ldots, a_{in}(T))}{mx_n(T)} (x_1(t) - x_n(T)) -$$
$$- \ldots - \frac{A_i(a_{i1}(T), \cdots, a_{in}(T))}{mx_n(T)} (x_n(t) - x_n(T)). \tag{6.3}$$

Здесь $m-$ число отличных от нуля элементов вектора $(x_1(T), \cdots, x_n(T))$. Отметим, что в разложение (6.3) входят только те слагаемые, у которых $x_i(T) \ne 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

В результате этих преобразований система уравнений (6.3) может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = B(A(T))x(t) + D(t), \tag{6.4}$$

где $A(T) = \{a_{ij}(T)\}_{i,j=\overline{1,n}}, \quad D(t) = (d_1(t), \ldots, d_n(t))$,

$$d_i(t) = A_i(a_{i1}(t), \ldots, a_{in}(t)) - A_i(a_{i1}(T), \ldots, a_{in}(T)) -$$
$$- \frac{A_i(a_{i1}(T), a_{i2}(T), \ldots, a_{in}(T))}{mx_1(T)} (x_1(t) - x_1(T)) -$$
$$- \ldots - \frac{A_i(a_{i1}(T), \ldots, a_{in}(T))}{mx_n(T)} (x_n(t) - x_n(T)).$$

Здесь и ниже для простоты обозначений через $B(A(T))$ обозначена матрица $B(A(T), r_1)$.

Решение уравнения (6.4) при $t \geq T$ можно представить в виде

$$x(t) = e^{B(A(T))(t-T)}x(T) + \int\limits_T^t e^{B(A(T))(t-s)}D(s)ds.$$

Из структуры оператора $D(t)$ следует, что при любом, как угодно малом ϵ $(\epsilon > 0)$, можно выбрать такое значение Δt, что при $T \leq t \leq$ $\leq T + \Delta t$ $\|D(t)\| \leq N\|x(t) - x(T)\| \leq \epsilon\|x(t)\|$, где $N-$ константа. Тогда из неравенства Гронуолла – Беллмана следует, что при $T \leq t \leq T +$ $+\Delta t$ $\|x(t)\| \leq \exp(\Lambda(\mathrm{B(A(T))} + \epsilon))(\mathrm{t} - \mathrm{T})\|\mathrm{x(T)}\|$. Если логарифмическая норма $\Lambda(B(A(T))$ меньше нуля, то взяв ϵ такое, что $\Lambda(B(A(T))) + \epsilon \leq 0$ и подобрав по нему соответствующее значение Δt, убеждаемся, что в промежутке времени $[T, T + \Delta t]$ траектория решения уравнения (6.1) не покидает сферы $S(0, r_1)$. Из полученного противоречия следует устойчивость решения уравнения (6.1).

По аналогии с доказательством теоремы 4.1 доказывается асимптотическая устойчивость. Теорема доказана.

Замечания. 1. При исследовании устойчивости решений уравнения (6.1) в евклидовом пространстве E_n в формулировке теоремы 6.1 следует логарифмическую норму заменить на $\mathrm{Re}B(C(T), r_1)$.

2. Утверждения теоремы распространяются на дифференциальные уравнения, описывающие неустановившиеся движения.

3. Аналогичные результаты справедливы для разностных уравнений с последействием.

Приведем несколько типов уравнений, к которым применим предложенный выше критерий устойчивости.

Вначале рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + b(t, x(t - h(t))), \tag{6.5}$$

где $a(t), b(t, \tau), h(t)-$ непрерывные функции, $b(t, 0) \equiv 0$, причем функция $b(t, \tau)$ имеет непрерывную производную по τ, а $h(t)-$ неубывающая функция.

Обозначим через $b'_2(t, \tau)$ производную функции $b(t, \tau)$ по второму аргументу.

Теорема 6.2 [20]. Пусть δ $(\delta > 0)-$ произвольное достаточно малое число. Пусть при любых t $(0 < t < \infty), \lambda_1$ $(0 < \lambda_1 < 1), \lambda_2$ $(-1 \leq \lambda_2 \leq 1)$ функция $\Lambda(t, \lambda_1, \lambda_2) = a(t) + \lambda_2 b_2'(t, \lambda_1 \delta) < 0$. Тогда тривиальное решение уравнения (6.5) устойчиво.

Доказательство. Докажем устойчивость решения уравнения (6.5). Пусть $h(0) = \beta_0$ $(\beta_0 \geq 0)$, $\max\limits_{\beta_0 \leq t \leq 0} |x(t)| = \delta$, где $\delta-$ достаточно малое положительное число. Покажем, что траектория решения уравнения (6.5), начавшаяся в сегменте $[-\delta, \delta]$ не покинет этого сегмента.

Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория решения уравнения (6.5) покидает сегмент $[-\delta, \delta]$. Представим уравнение (6.5) в виде

$$\frac{dx}{dt} = a(T)x(t) + b_2'(T, \lambda(T)x(T - h(T)))\frac{x(T - h(T))}{x(T)}x(t) + g(t),$$

где

$$g(t) = ((a(t) - a(T))x(t)) + (b_2'(t, \lambda(t)x(t - h(t)))x(t - h(t)) -$$

$$- b_2'(T, \lambda(T)(x(T - h(T)))x(T - h(T))) -$$

$$- b_2'(T, \lambda(T)x(T - h(T)))\frac{x(T - h(T))}{x(T)}(x(t) - x(T)),$$

$0 < \lambda(T), \lambda(t) < 1$. Из условий теоремы следует, что

$$\gamma(T) = \Lambda\left[a(T) + b_2'(T, \lambda(T)x(T - h(T)))\frac{x(T - h(T))}{x(T)}\right] < 0$$

и что для любого ϵ $(\epsilon > 0)$ существует такой интервал времени $T \leq$ $\leq t \leq T + \Delta T$, в течение которого $|g(t)| \leq \epsilon |x(t)|$. Выбрав такое ϵ, что $\gamma(T) + \epsilon < 0$, убеждаемся, что при $T < t \leq T + \Delta T$ $|x(t)| < \delta$.

Теорема доказана.

Аналогичным образом исследуется устойчивость решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) + b(t, x(t - h(t)))$$

при начальных условиях

$$x^{(k)}(0) = \alpha_k, k = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

7. Об устойчивости движения в одной системе с последействием

В данном разделе рассматривается система с последействием, состояние которой в какой-либо момент времени t зависит не только от ее фазовых координат в момент t, но и от фазовых координат в предшествующие моменты времени $[\gamma_i(t), t]$, где $\gamma_i(t) \le t, i = 1, 2, \dots, n$, (в частном случае $\gamma_i(t) \equiv t_0$ при $i = 1, 2, \dots, n$).

Будем исследовать устойчивость движения, отвечающего нулевому решению уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_{\Gamma(t)}^{t} K(t, s, x(s))ds + F(x, u, t), \qquad u \in R^n, \tag{7.1}$$

где $\gamma_i(t) \le t, \gamma_i(0) = \beta_0$; матрица $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ и вектор-функции $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), K(t, s, x(s)) = (K_1(t, s, x(s)), \dots, K_n(t, s, x(s)))$, $F(x, u, t) = (F_1(x, u, t), \dots, F_n(x, u, t))$ непрерывны в области $\Omega_1 \times \Omega_2 \times$ $\times\ [0, \infty)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$; $F(0, u, t) \equiv 0$.

Здесь Ω_1- некоторая окрестность точки $x = 0$; Ω_2- область определения вектора $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$; индексы i, j принимают значения $1, 2, \dots, n$.

Отметим, что случай [92], когда вектор управления $u(t)$ задается аналитическими функционалами, представимыми абсолютно сходящимися рядами Вольтерра – Фреше

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_k = 1}^{n} \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t K_i^{j(k)}(t, s_1, \dots, s_k) x_{j_1}(s_1) \dots x_{j_k}(s_k) ds_1, \dots, dx_k,$$

где $K_i^{j(k)}(t, s_1, \dots, s_k)-$ непрерывные функции, заданные на множестве $J_k' = \{(t, s_1, \dots, s_k) \in R_{k+1}, 0 \le s_r \le t \le \infty, r = 1, 2, \dots, k\}$, также укладывается в описанную выше формулу задания вектора управления.

Уравнения вида (7.1) находят применение в задачах вязкоупругости [57], аэроупругости [13], а также при исследовании экономических моделей [42].

При $\gamma_i(t) \equiv t_0$, аналитической вектор–функции $F(x, u, t)$ и линейном интегральном операторе устойчивость уравнения (7.1) была исследована [97] первым методом Ляпунова.

Уравнение (7.1) будем исследовать в n-мерном пространстве R_n. В качестве нормы в R_n можно взять одну из следующих:

$$\| x \|_\infty = \max \mid \mathrm{x_i} \mid; \| \mathrm{x} \|_1 = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \mid \mathrm{x_k} \mid; \| \mathrm{x} \|_2 = [\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{x_k} \mid^2]^{1/2}.$$

Пусть $r > 0$. Обозначим через $\phi(t)$ произвольную непрерывно-дифференцируемую кривую $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, принадлежащую шару $R(0, r)$. Зафиксируем произвольный момент времени T.

Введем вектор $C = \mathrm{col}(\mathrm{c_1}, \ldots, , \mathrm{c_n})$, где $c_i = \phi_i(T)$. Введем обозначения $B(C, T) = \{b_{ij}(C, T)\}, H(C, T) = \{h_{ij}(C, T)\}$,

$$b_{ij}(C, T) = \begin{cases} \chi_i(T)/(mc_j), & c_j \neq 0, \\ 0, & c_j = 0, \end{cases}$$

$\chi_i(T) = \int\limits_{\gamma_i(T)}^{T} K_i(T, \tau, \phi(\tau)) d\tau,$

$$h_{ij}(C, T) =$$

$$= \begin{cases} [F_i(0, \ldots, 0, c_j, c_{j+1}, \ldots, c_n, u(T), T) - \\ -F_i(0, \ldots, 0, 0, c_{j+1}, \ldots, c_n, u(T), T)]/c_j, & c_j \neq 0 \\ 0, & c_j = 0 \end{cases}$$

где $m-$ число ненулевых координат вектора C.

Теорема 7.1 [19]. Пусть при любом фиксированном значении t, $0 \leq t \leq \infty$, при любом ненулевом векторе $C \in R(0, r)$, где $r > 0$, при любой непрерывно-дифференцируемой кривой $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, принадлежащей шару $R(0, r)$, и такой, что $\phi_i(t) = c_i$, выполнено условие $\Lambda(A(t) + B(C, t) + H(C, T)) < 0$ ($\Lambda(A(t) + B(C, t) + H(C, T)) < -\alpha, \alpha = = \mathrm{const} > 0$).

Тогда тривиальное решение уравнения (7.1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $r_1 < r$ и покажем, что при выполнении условий теоремы каждое решение уравнения (7.1), у которого значения функции $x(t)$ при $\beta_0 \leq t \leq 0$ расположены в шаре $R(0, r_1)$, не покинет этого шара. Предположим противное: пусть в момент времени $t = T$ траектория $x(t)$ решения уравнения (7.1) покидает шар $R(0, r_1)$.

Введем обозначения

$$d_{il} = a_{il}(T) + \chi_i(T)/(mx_l(T)) + [F_i(0,\dots,0,x_l(T),\dots,x_n(T),u(T),T) -$$

$$- F_i(0,\dots,0,0,x_{l+1}(T),\dots,x_n(T),u(T),T)]/x_l(T),$$

$$g_i(t,x(t)) = \sum_{l=1}^{n}(a_{il}(t) - a_{il}(T))x_l(t) - \sum_{l=1}^{n}\chi_i(T)\frac{(x_l(t)-x_l(T))}{mx_l(T)} -$$

$$-(\chi_i(t) - \chi_i(T)) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}{}'\{F_i(0,\cdots,0,x_j(T),\dots,x_n(T),u(T),T) -$$

$$- F_i(0,\cdots,0,x_{j+1}(T),\dots,x_n(T),u(T),T)\}(x_j(t) - x_j(T))/x_j(T) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}{}''\{F_i(0,\dots,0,x_j(T),\cdots,x_n(T),u(T),T) -$$

$$- F_i(0,\dots,0,0,x_{j+1}(T),\cdots,x_n(T),u(T),T)\}(x_j(t) - x_j(T)) +$$

$$+F_i(x(t),u(t),t) - F_i(x(T),u(T),T),$$

где $m-$ число отличных от нуля чисел среди $x_1(T),\dots,x_n(T)$, $\sum{}'$ означает суммирование по j таким, что $x_j(T) \neq 0$, $\sum{}''$ означает суммирование по j таким, что $x_j(T) = 0$.

Отметим, что если при некотором $l (1 \le l \le n)$ $x_l(T) = 0$, то в обозначениях d_{il} слагаемые, у которых знаменатель равен $x_l(T)$, опускаются.

Тогда при $t \ge T$ систему уравнений (7.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = Dx + G(t,x(t)), \tag{7.2}$$

$D = \{d_{ij}\}, G(t,x(t)) = \mathrm{col}(g_1(t,x(t)),\dots,g_n(t,x(t)))$.

Решение уравнения (7.2) при $t \ge T$ имеет вид

$$x(t) = e^{D(t-T)}x(T) + \int_T^t e^{D(t-s)}G(s,x(s))ds. \tag{7.3}$$

Из структуры оператора $G(t,x(t))$ следует, что при любом как угодно малом ϵ ($\epsilon > 0$) можно выбрать такое значение Δt, что при $T \le t \le$ $\le T + \Delta t$ $\parallel G(t,x(t)) \parallel \le \epsilon \parallel x(t) \parallel$.

Переходя в уравнении (7.3) к нормам, имеем при $T \le t \le T + \Delta t :$

$$\parallel x(t) \parallel \le e^{\Lambda(D)(t-T)}x(T) + \epsilon\int_T^t e^{\Lambda(D)(t-s)} \parallel x(s) \parallel ds. \tag{7.4}$$

Введем новую переменную $\psi(t) = e^{-\Lambda(D)t} \parallel x(t) \parallel$. Тогда неравенство (7.4) принимает вид

$$\psi(t) \leq \psi(T) + \epsilon \int\limits_T^t \psi(s)ds. \qquad (7.5)$$

Применяя к (7.5) неравенство Гронуолла – Беллмана и возвращаясь к норме $\parallel x(t) \parallel$, убеждаемся, что при $T \leq t \leq T + \Delta t$ справедлива оценка $\parallel x(t) \parallel \leq \exp((\Lambda(D) + \epsilon)(t - T)) \parallel x(T) \parallel$.

Так как по условиям теоремы логарифмическая норма меньше 0, то взяв ϵ таким, что $\Lambda(D) + \epsilon \leq 0$, и подобрав по нему соответствующее значение Δt^*, убеждаемся в том, что в промежутке времени $[T, T + \Delta t^*]$ траектория решения уравнения (7.1) не покидает сферы $S(0, r_1)$. Из полученного противоречия следует устойчивость решения уравнения (7.1).

Аналогичным образом доказывается асимптотическая устойчивость.

Теорема доказана.

Замечание. Если система уравнений (7.1) исследуется в евклидовом пространстве E_n, то в формулировке теоремы условие

$\Lambda(A(t) + B(C, t) + H(C, T)) < 0$ $(\Lambda(A(t) + B(C, t) + H(C, T)) < -\alpha)$ можно заменить на следующее:

$\mathrm{Re}(A(t) + B(C, t) + H(C, t)) < 0$ $(\mathrm{Re}(A(t) + B(C, t) + H(C, t)) < -\alpha)$.

Рассмотрим несколько классов задач, для которых легко проверяются условия теоремы 7.1.

В качестве одного из таких классов рассмотрим уравнения вида (7.1), у которых

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \max_{i=1,\ldots,n} \mid t - \gamma_i(t) \mid \leq H. \qquad (7.6)$$

Пусть $r > 0$. Зафиксируем произвольное значение T. Пусть $\zeta(T) = (\zeta_1(T), \ldots, \zeta_n(T)), \zeta_i(T) \in (\gamma_i(T), T)$. Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$– произвольная точка, расположенная внутри сферы $S(0, r)$, а $s(r) = (s_1(r), \ldots, s_n(r))$– произвольная точка, расположенная на сфере $S(0, r)$.

Введем обозначения

$D^{(T)} = \{d_{il}^{(T)}\}$, $d_{il}^{(T)} = d_{il}(T, \zeta_i(T), \eta, s(r)) = a_{il}(T) + K_i(T, \zeta_i(T), \eta)(T - \gamma_i(T))/(ms_l(r)) + [F_i(0, \ldots, 0, s_l(r), \ldots, s_n(r), u(T), T) - F_i(0, \ldots, 0, 0, s_{l+1}(r), \ldots, s_n(r), u(T), T)]/s_l(r)$,

где m– число ненулевых координат вектора $s(r) = (s_1(r), \ldots, s_n(r))$.

Теорема 7.2 [19]. Пусть выполнены условия (7.6). Если при достаточно малых $0 < r \leq r^*$, произвольных T $(t_0 \leq T < \infty)$, $\zeta(T), \eta \in$

$\in R(0,r)$, $s(r) \in S(0,r)$, логарифмическая норма матрицы $D^{(T)}$ отрицательна (меньше $-\alpha, \alpha > 0$), то решение уравнения (7.1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Зафиксируем произвольное достаточно малое значение $r (0 < r \le r^*)$ и покажем, что при выполнении условий теоремы каждое решение уравнения (7.1), у которого значения функции $x(t)$ при $\beta_0 \le t \le 0$ расположены в шаре $R(0,r)$, не покинет этого шара. Предположим противное: пусть в момент времени $t = T$ траектория $x(t)$ уравнения (7.1) покидает шар $R(0,r)$. Обозначим точку пересечения траектории $x(t)$ со сферой $S(0,r)$ через $s(r) = (s_1(r), \dots, s_n(r))$.

Воспользовавшись теоремой о среднем, имеем $\chi_i(T) = K_i(T, \zeta_i(T), \eta)(T - -\gamma_i(T))$.

Тогда i-е уравнение системы уравнений (7.1) можно представить в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{l=1}^{n} d_{il}^{(T)} x_l(t) + g_i(t, x(t)),$$

$$g_i(t,x(t)) = \sum_{l=1}^{n} (a_{il}(t) - a_{il}(T)) x_l(t) -$$

$$-\sum_{l=1}^{n} K_i(T, \zeta_i(T), \eta)(T - \gamma_i(T))(x_l(t) - s_l(r))/(m s_l(r)) +$$

$$+(\chi_i(T) - K_i(T, \zeta_i(T), \eta)(T - \gamma_i(T))) -$$

$$-[F_i(s_1(r), \dots, s_n(r), u(T), T) - F_i(0, s_2(r), \dots, s_n(r), u(T), T)] \times$$

$$\times (x_1(t) - s_1(r))/s_1(r) - \dots - [F_i(0, \dots, 0, s_n(r), u(T), T) -$$

$$-F_i(0, \dots, 0, 0, u(T), T)](x_n(t) - s_n(r))/s_n(r) +$$

$$+[F_i(x(t), u(t), t) - F_i(s(r), u(T), T).$$

При $t \ge T$ систему уравнений (7.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = D^{(T)} x + G(t, x(t)), \quad G(t, x(t)) = \mathrm{col}(g_1(t, x(t)), \dots, g_n(t, x(t))).$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 7.1, завершаем доказательство теоремы 7.2.

Рассмотрим следующий модельный пример:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + \int_{t-H}^{t} x^{1+\epsilon}(\tau) \mathrm{sgn}(x(\tau)) d\tau, \quad \epsilon > 0. \tag{7.7}$$

Нетрудно видеть, что $d(T)$ может принимать одно из следующих значений: $-1+\eta^{1+\epsilon}Hr^{-1}, -1-\eta^{1+\epsilon}Hr^{-1}$. В обоих случаях $\Lambda(d(T)) < -1 + \mid \eta^{1+\epsilon}Hr^{-1} \mid$. Так как по построению $\eta < r$, то $\Lambda(d(T)) < -1 + \mid \eta^{\epsilon}H \mid$ и остается меньше $-\alpha$ ($\alpha = \mathrm{const} > 0$) при любом конечном H и достаточно малых значениях r. Следовательно, решение уравнения (7.7) асимптотически устойчиво.

В качестве другого класса рассмотрим уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + F(x(t), \int\limits_0^t K(t,s,x(s))ds), \tag{7.8}$$

где $F(x,y)-$ непрерывная функция по обеим переменным.

Для простоты обозначений уравнение (7.8) предполагается скалярным. Из дальнейших выкладок легко видеть, что приводимые ниже условия устойчивости решения уравнения (7.8) распространяются на подобные системы интегро $-$ дифференциальных уравнений.

Наложим на функцию $F(x,y)$ следующие условия:
1)$F(-x,y) = -F(x,y)$;
2)$F(0,y) \equiv 0$.

Пусть $r-$ достаточно малое положительное число. Через $s_1(r)$ обозначим точки, лежащие на сфере $S(0,r)$ в пространстве R_1, т. е. $s_1(r) = \pm r$. Каждому значению t поставим в соответствие некоторое число $\zeta_1(t) \in \in (0,t)$. Пусть η_1, η_2- произвольные числа, расположенные в интервале $(-r,r)$, причем $\eta_1, \eta_2 \geq 0$ при $s_1(r) = r$ и $\eta_1, \eta_2 \leq 0$ при $s_1(r) = -r$.

Введем обозначение

$$d(T) = \begin{cases} a(T) + F(\eta_1, TK(T,\zeta_1,\eta_2))/\eta_1, \quad \mid \eta_2 \mid \leq \mid \eta_1 \mid, \quad \eta_1 \neq 0, \\ \qquad a(T), \quad \eta_1 = 0. \end{cases}$$

Теорема 7.3 [19]. Пусть $r-$ произвольное положительное достаточно малое число. Если при любом $T (0 < T < \infty)$, произвольных $\zeta(T) \in \in (0,T), \eta_1, \eta_2 \in S(0,r)$ ($\eta_1 \cdot \eta_2 \geq 0, \mid \eta_2 \mid \leq \mid \eta_1 \mid$) выполняется условие $d(T) < 0$ ($d(T) < -\alpha, \alpha > 0$), то решение уравнения (7.8) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Предположим для определенности, что $x(0) = x_0 > > 0$. Пусть в момент времени T траектория решения уравнения (7.8) покидает сферу $S(0,r)$, т. е. проходит через точку r на оси OX. Через точку $-r$ траектория пройти не может, так как $x_0 > 0$, а по условию 2), налагаемому на функцию $F(x,y)$, траектория, начавшаяся в сегменте $[0,r]$, не может перейти в интервал $[-r,0)$.

Представим при $t \geq T$ уравнение (7.8) в виде

$$\frac{dx}{dt} = d(T)x(t) + (a(t) - a(T))x(t) + F(r,\psi(T)) - F(r, TK(T,\zeta_1,\eta_2))x(t)/r +$$
$$+F(x(t),\psi(t)) - F(r,\psi(T)),$$

где $\psi(t) = \int\limits_0^t K(t,s,x(s))ds$.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 7.1 и учитывая, что траектория уравнения (7.8) может находиться только в сегменте $[0,r]$, убеждаемся в справедливости теоремы.

8. О достаточных условиях положительного решения проблемы Айзермана

В этом разделе приводится положительное решение проблемы Айзермана в случае, когда правая часть дифференциального уравнения является самосопряженной матрицей.

Рассмотрим в n-мерном пространстве R_n наряду с нелинейной системой

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + f(x_1);$$
$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k, \quad i = 2,\dots,n, \tag{8.1}$$

линейную систему вида (8.1) при $f(x_1) = bx_1$.

Проблема Айзермана состоит в следующем: если известно, что нулевое решение линейной системы асимптотически устойчиво при всех b, удовлетворяющих условию $\alpha < b < \beta$, то будет ли нулевое решение нелинейной системы (8.1) устойчивым в целом, если выполнено условие

$$\alpha < f(x_1)/x_1 < \beta. \tag{8.2}$$

Эта проблема явилась источником многочисленных исследований. Для систем второго [66] и третьего [88] порядков показано, что выполнение условий (8.2) недостаточно для устойчивости решений.

Ниже приводится исследование устойчивости систем нелинейных уравнений более общего вида, нежели (8.1),

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x), \tag{8.3}$$

из которого следует положительное решение проблемы Айзермана для самосопряженной матрицы при условиях, что $-\infty < \alpha, \beta < \infty$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $A = \{a_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, $F(x) = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$.

Через $s_j(s_j(K))$ обозначим s-числа оператора K, т. е. собственные значения оператора K^*K.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx, \tag{8.4}$$

у которой матрица $B = \{b_{ik}\}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, подобрана таким образом, чтобы

$$\sigma(\mathrm{Re}(\mathrm{A} + \mathrm{B})) \le -\alpha, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{8.5}$$

Множество матриц B, для которых выполняется условие (8.5), обозначим через G.

Зафиксируем произвольный элемент $z = (z_1, \dots, z_n) \in R_n$ и поставим ему в соответствие матрицу $C(z) = \{c_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, составленную из элементов $c_{ik} = f_i(z_1, \dots, z_n)(mz_k)^{-1}$ при $z_k \ne 0$, $c_{ik} = d_{ik}$ при $z_k = 0$, где $d_{ik} = \lim\limits_{z_k \to 0} f_i(z_1, \dots, z_n) z_k^{-1}$, если предел существует, $d_{ik} = 0$, если предел не существует, $m-$ число элементов $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ вектора z, отличных от нуля.

Теорема 8.1 [18]. Пусть при любом $z \in R_n$, матрица $C(z)$ принадлежит множеству G, функции $f_i(z_1, \dots, z_n) (i = 1, 2, \dots, n)$ непрерывны и $f_i(0, \dots, 0) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Тогда тривиальное решение системы уравнений (8.3) устойчиво в целом.

Доказательство. Дадим начальному условию $x(t_0) = 0$ возмущение и рассмотрим систему уравнений (8.3) при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $\|x_0\|$ достаточно малое положительное число.

Докажем асимптотическую устойчивость решения уравнения (8.3) при этом начальном условии. Доказательство проведем от противного.

Пусть в момент времени $T (T > t_0)$ траектория решения системы уравнений (8.3) проходит через точку $z \in R_n$ с нормой $\|z\| = r$. Покажем, что существует такой отрезок времени Δt_1, в течение которого траектория решения системы (8.4) перейдет со сферы $S(0,r)$ в шар $R(0,r_1)$, где $r_1 = e^{-\alpha\Delta t_1/2}r$. Для этого представим уравнение (8.3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Cx + D(x), \tag{8.6}$$

где

$$D(x) = (d_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,d_n(x_1,\ldots,x_n)), d_i(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= f_i(x_1,\ldots,x_n) - f_i(z_1,\ldots,z_n) - \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(x_k - z_k).$$

Решение уравнения (8.6) можно представить при $t \geq T$ в виде

$$x(t) = e^{(A+C)(t-T)}x(T) + \int_T^t e^{(A+C)(t-\tau)}D(x(\tau))d\tau. \tag{8.7}$$

Переходя в (8.7) к нормам, имеем:

$$\|x(t)\| = e^{-\alpha(t-T)}r + \int_T^t e^{-\alpha(t-T)}\|D(x(\tau))\|d\tau. \tag{8.8}$$

Обозначим через Δt_1 промежуток времени, в течение которого $\|D(x(t))\| \leq (\alpha/2)\|x(\tau\|$. Тогда при $t \in [T, T+\Delta t_1]$ неравенство (8.8) может быть усилено путем замены $\|D(x(\tau))\|$ на $\alpha\|x(\tau)\|/2$. Умножив обе части усиленного неравенства на $e^{\alpha t}$, приходим к неравенству:

$$\varphi(t) \leq e^{\alpha T}r + \frac{\alpha}{2}\int_T^t \varphi(\tau)d\tau, \quad \varphi(t) = e^{\alpha T}\|x(t)\|. \tag{8.9}$$

Применяя к (8.9) неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем при $T \leq$ $\leq t \leq T + \Delta t_1$ оценку:

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha(t-T)/2}r. \tag{8.10}$$

Следовательно, при $t_1 = T + \Delta t_1$ получим оценку

$$r_1 = e^{-\alpha\Delta t_1/2}r.$$

Продолжая этот процесс, убеждаемся что в моменты времени $t_2, t_3, \ldots$ траектория решения уравнения (8.3) пересекает сферы $S(0,r_2)$, $S(0,r_3)$ и т. д.

Для радиусов сфер r_k имеем выражения $r_k = r\exp[-\alpha(\Delta t_1 + \cdots + +\Delta t_k)/2]$; $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $t_0 = T$.

Таким образом, показано, что траектория решения системы уравнений (8.3), начатая в сфере $S(0, r)$, не покидает этой сферы. Применяя теорему Пеано ([106], с. 21), убеждаемся, что траектория системы уравнений (8.4) продолжима на бесконечный интервал времени $[T, \infty)$.

Имеются две возможности:

1) существует момент времени T^*, начиная с которого неравенство (8.10) нарушается;

2) неравенство (8.10) справедливо при всех $t > T$.

Рассмотрим первую возможность.

Очевидно, что при $t \in [T, T^*)$ выполняется неравенство (8.10). Переходя к пределу при $t \to T^*$, убеждаемся, что неравенство (8.10) справедливо при $t \in [T, T^*]$.

Согласно сделанному предположению, при $t > T^*$ неравенство (8.10) нарушается. Однако это невозможно, так как из условий теоремы и приведенного выше доказательства следует, что взяв T^* за начальное приближение, мы имеем сегмент $[T^*, T^* + \Delta T^*]$, на котором выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha(t-T^*)/2}\|x(T^*)\|.$$

Таким образом получено противоречие, из которого следует, что неравенство (8.10) не нарушается ни при каких значениях $t > T$.

Рассмотрим вторую возможность, при которой

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha(t-T)/2}\|x(T)\| \tag{8.11}$$

при $t \geq T$.

Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) существует такое значение T^{**}, при котором $x(T^{**}) = 0$; 2) $\|x(t)\| \neq 0$ при всех $t \geq T$.

В первом случае очевидно, что $x(t) = 0$ при $t \geq T^{**}$.

Во втором случае из неравенства (8.11) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Теорема доказана.

Обозначим через G^* множество матриц $B = \{b_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, для которых выполняется условие $\Lambda(A + B) \leq \alpha$, $\alpha = \text{const} < 0$.

Теорема 8.2 [18]. Пусть при любом $z \in R_n$, матрица $C(z)$ принадлежит множеству G^*, функции $f_i(z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны и $f_i(0, \ldots, 0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда решение системы уравнений (8.4) устойчиво в целом.

Доказательство подобно доказательству теоремы 8.1. Единственное отличие заключается в том, что при переходе от выражения (8.7) к неравенству (8.8) используется известное свойство логарифмической нормы $\|e^{A+C}\| \le e^{\Lambda(A+C)}$.

Обозначим через G^{**} множество матриц $B = \{b_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, для которых выполняется условие $s^* = \max\limits_j s_j(A+B) \le \alpha$, $\alpha = \mathrm{const} <$ < 0, $s_j(A+B) - s$ - числа матрицы $(A+B)$.

Теорема 8.3 [18]. Пусть при любом $z \in E_n$, матрица $C(z)$ принадлежит множеству G^{**}, функции $f_i(z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны и $f_i(0, \ldots, 0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда решение системы уравнений (8.3) устойчиво в целом.

Доказательство подобно доказательству теоремы 8.1. Отличие заключается в следующим. Известно, что $\|e^{A+C}\| \le e^{\|A+C\|}$.

Норма $\|A + C\|$ оценивается в E_n посредством следующей цепочки неравенств:

$$\|(A+C)x\| = ((A+C)x, (A+C)x)^{1/2} = (UTx, UTx)^{1/2} = \|Tx\| \le \max_j s_j \|x\|,$$

где использовано представление оператора $A + C = UT$ в виде произведения частично изометричного оператора U и оператора $T = (A+$ $+C)^*(A+C)$.

Следовательно $\|e^{A+C}\| \le e^{s^*}$. Воспользовавшись этим неравенством и почти дословно повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 8.1, завершаем доказательство теоремы 8.3.

Вернемся к проблеме Айзермана. Пусть $a = \lim f(x)/x$ при $x \to 0$, если предел существует, или $a = 0$, если предел не существует.

Будем считать, что

1) матрица $A = \{a_{ij}\}$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$, самосопряженная;

2) линейная система, соответствующая (8.1), при $f(x_1) = bx_1$ асимптотически устойчива при любом $b \in B$, $B = [\alpha, \beta] \cup \{a\}$;

3) выполнено условие (8.2);

4) $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$.

Из симметричности матрицы A следует симметричность матрицы $\bar{A}_b = \{\bar{a}_{lk}\}$ $(l, k = 1, 2, \ldots, n)$, где $\bar{a}_{11} = a_{11} + b$, $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$ при $(i, j) \neq (1, 1)$.

Покажем, что из условия асимптотической устойчивости решения линейной системы, соответствующей (8.1) при $f(x_1) = bx_1$, $b \in B$ следует существование такой постоянной $\gamma < 0$, что для всех указанных значений b собственные значения матриц $\bar{A}_b$ меньше γ.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует последовательность чисел $b_k (b_k \in B)$, таких, что $\lim \max(\sigma(\bar{A}_{b_k})) = 0$ при $k \to \infty$.

Отметим, что если $a \notin [\alpha, \beta]$, то число a не принадлежит последовательности $\{b_k\}$ при достаточно больших значениях k, так как расстояние от $\sigma(\bar{A}_a)$ до мнимой оси положительно. Из последовательности b_k можно извлечь подпоследовательность сходящуюся к числу b^*, причем $\alpha \leq b^* \leq \beta$. Так как $\max \sigma(\bar{A}_{b^*}) \leq \gamma(b^*) < 0$, то ([64], гл. 14) существует ϵ-окрестность $(\epsilon = \gamma(b^*)/2)$ точки b^*, для элементов b которой спектр матрицы $\bar{A}_b$ расположен левее значения $\gamma(b^*) + \epsilon \leq \gamma(b^*)/2 < 0$. Из полученного противоречия следует, что $\max \sigma(\bar{A}_b) \leq \gamma$ при всех $\alpha \leq b \leq \beta$.

Поскольку матрица $\bar{A}_b$– самосопряженная при всех $b \in B$, то $\sigma(\bar{A}_b) = \sigma(\mathrm{Re}\bar{A}_b)$. Следовательно, к системе уравнений (8.1) возможно применение теоремы 8.1. В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 8.4 [18]. Пусть линейная система, соответствующая системе (8.1) при $f(x_1) = bx_1$, асимптотически устойчива при любых b, таких, что $b \in B$. Матрица A самосопряженная, выполнены условия (8.2) и $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$. Тогда нелинейная система (8.1) устойчива в целом.

Заканчивая этот раздел, приведем следующий критерий устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с переменными матрицами [86].

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x). \tag{8.12}$$

Теорема 8.5 [86]. Пусть матрица $A(x)$ ограничена вместе с ее производными при $x \in R(0, \delta_0)$. Пусть при каждом фиксированном x, $x \in R(0, \delta_0)$, матрица $A(x)$ является гурвицевой и более того, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\max \mathrm{Re}\lambda(x) \leq -\lambda_0$ при $x \in R(0, \delta_0)$. Тогда найдется такое δ $(\delta < \delta_0)$, что любое решение системы (8.12), соответствующее начальным условиям из шара $R(0,\delta)$, не выходит из этого шара и стремится к $x=0$, убывая не медленнее, чем экспоненциально.

9. Двусторонние оценки норм решений систем нелинейных дифференциальных уравнений

В теории устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с переменными параметрами широко используются неравенства Лозинского и Винтнера [см. теоремы 1.3 и 1.4 из главы 1], дающие оценку сверху и снизу нормы решения системы дифференциальных уравнений. В данном разделе эти неравенства распространяются на системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt}=a_n(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)) \tag{9.1}$$

с начальными условиями

$$x_k(0)=x_k^0,\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{9.2}$$

и непрерывно дифференцируемыми по переменным $u_k (k=1,2,\ldots,n)$ функциями $a_l(t,u_1,\ldots,u_n)$, $l=1,2,\ldots,n$. Здесь $a_i(t,0,\ldots,0)\equiv 0,\ t\geq$ $\geq 0, i=1,\ldots,n.$

Будем считать, что решение задачи Коши (9.1)–(9.2) определено при всех $t\geq 0$.

Исследование устойчивости будем проводить в пространствах R_n, E_n, где E_n– евклидово пространство.

Пусть $a_i(t,x_1(t),\ldots,x_{j-1}(t),0,x_{j+1}(t),\ldots,x_n(t))=0, j=1,2,\ldots,n.$ Обозначим через $A(t,X(t))$ матрицу, элементами которой являются функции:

$$a_{ij}(t,X(t))=$$
$$=\begin{cases}\frac{a_i(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{nx_j(t)}, & x_j(t)\neq 0,\\ \frac{1}{n}a'_{ij}(t,x_1(t),\ldots,x_{j-1}(t),0,x_{j+1}(t),\ldots,x_n(t)), & x_j(t)=0,\end{cases} \tag{9.3}$$

$a'_{ij}(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))$ означает производную функции $a_i(t,x_1(t),\ldots,x_{j-1}(t),u_j,x_{j+1}(t),\ldots,x_n(t))$ по переменной u_j при $u_j=0$.

Элементы $a_{ij}(t, X(t))$ матрицы $A(t, X(t))$ были получены из представления функции $a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ в виде

$$a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{1}{n}\left(\frac{a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))}{x_1(t)}x_1(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))}{x_2(t)}x_2(t) + \dots + \frac{a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))}{x_n(t)}x_n(t)\right)$$

в предположении, что все компоненты $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вектора $X(t)$ отличны от нуля.

Если в момент времени t $x_j(t) = 0$, то коэффициент $a_{ij}(t, X(t))$ определяется из предельного перехода

$$a_{ij}(t, X(t)) = \frac{1}{n}\lim_{u \to 0}\frac{a_i(t, x_1(t), \dots, x_{j-1}(t), u, x_{j+1}(t), \dots, x_n(t))}{u} =$$

$$= \frac{1}{n}a'_{ij}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

При этом предполагается, что

$$a_i(t, x_1(t), \dots, x_{j-1}(t), 0, x_{j+1}(t), \dots, x_n(t)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и соответствующие производные существуют.

Можно ввести элементы $a_{ij}(t, X(t))$ матрицы $A(t, X(t))$ по формуле

$$a_{ij}(t, X(t)) =$$

$$= \begin{cases} \lambda_{ij}\frac{a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))}{x_j(t)}, \ x_j(t) \neq 0, \\ \lambda_{ij}a'_{ij}(t, x_1(t), \dots, x_{j-1}(t), 0, x_{j+1}(t), \dots, x_n(t)), \ x_j(t) = 0, \end{cases} \tag{9.4}$$

где $0 \le \lambda_{ij} \le 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij} = 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Это следует из представления функции $a_i(t, x_1, \dots, x_n)$ в виде

$$a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\frac{a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))}{x_j(t)}x_j(t)$$

в предположении, что все компоненты $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вектора $X(t)$ отличны от нуля.

Если в момент времени t $x_j(t) = 0$, то коэффициент
$a_{ij}(t, X(t)) = \lambda_{ij}a'_{ij}(t, x_1(t), \dots, x_{j-1}(t)), 0, x_{j+1}(t), \dots, x_n(t)$.

Отметим также, что коэффициенты λ_{ij} могут быть не только константами, но и зависеть от t и $x(t)$.

Из сказанного следует, что элементы $a_{ij}(t, X(t))$ матрицы $A(t, X(t))$ могут быть определены неоднозначно. При определении элементов $a_{ij}(t, X(t))$ естественным представляется следующий подход. Пусть функция $a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ представима в виде

$$a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = b_{i1}(t, x_1(t)) + \dots + b_{in}(t, x_n(t)) +$$
$$+ b_{i12}(t, x_1(t), x_2(t)) + \dots + b_{i,n-1,n}(t, x_{n-1}(t), x_n(t)) + \dots +$$
$$+ b_{i,1,2,\dots,n}(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

причем каждое слагаемое вида $b_{iv_1,\dots,v_l}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))$, где v_i– целые числа, $1 \le v_1 < \dots < v_l \le n$, $1 \le l \le n$, существенно зависит от каждой из переменных $x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t)$. В этом случае для каждого слагаемого $b_{i,v_1,\dots,v_l}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))$ строится матрица размера $l \times l$, состоящая из элементов, построенных по формулам вида (9.3) или (9.4).

Например, вычисляются коэффициенты $b_{i,v_1,\dots,v_l;j}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))$ матрицы $B(t, x_{v_1}(t), \dots, v_{v_l}(t))$ по формуле

$$b_{i,v_1,\dots,v_l;j}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t)) = \begin{cases} \frac{1}{l} \frac{b_i(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))}{x_{v_j}(t)}, \\ x_{v_j}(t) \ne 0, \\ \frac{1}{l} b'_{ij}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_{j-1}}(t), 0, x_{v_{j+1}}(t), x_{v_l}(t)), \\ x_{v_j}(t) = 0. \end{cases}$$

Тогда функцию $b_i(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))$ можно представить в виде

$$b_i(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{l} b_{i,v_1,\dots,v_l;j}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t)) x_j(t).$$

Аналогичные представления имеют место для всех функций $b_i(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))$ при $1 \le v_1 < v_2 < \dots < v_l \le n$, $1 \le l \le n$.

Суммируя все построенные таким образом коэффициенты $b_{i,v_1,\dots,v_l;j}(t, x_{v_1}(t), \dots, x_{v_l}(t))$ по переменным $1 \le v_1 < v_2 < \dots < v_l \le n$, получаем элемент $a_{ij}(t, X(t))$ матрицы $A(t, X(t))$.

Матрицу $A(t, X(t))$ можно определить иначе.

Например, элементы $a_{lk}(t,X(t))$ матрицы $A(t,X(t))$ могут быть определены выражением

$$a_{lk}(t,X(t)) = \begin{cases} \frac{a_l(t,0,\ldots,0,x_k(t),\ldots,x_n(t)) - a_l(t,0,\ldots,0,x_{k+1}(t),\ldots,x_n(t))}{x_k(t)}, & x_k(t) \neq 0, \\ a_{lk}{}'(t,0,\ldots,0,x_{k+1}(t),\ldots,x_n(t)), & x_k(t) = 0, \end{cases}$$

$l,k = 1,\ldots,n$. Здесь $a_{lk}{}'(t,0,\ldots,0,u_{k+1},\ldots,u_n)$ означает производную функции $a_l(t,0,\ldots,0,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n)$ по переменной u_k при $u_k = 0$. Отметим, что в этом случае не требуется выполнения условия
$a_i(t,x_1(t),\ldots,x_{j-1}(t),0,x_{j+1}(t),\ldots,x_n(t)) = 0, j = 1,2,\ldots,n.$

Возможны и другие способы определения матрицы $A(t,X(t))$, но из-за отсутствия места на них не останавливаемся.

При каждом значении t поставим матрице $A(t,X(t))$ в соответствие ее логарифмическую норму $\Lambda(A(t,X(t)))$.

Справедливы следующие неравенства, являющиеся распространением на случай нелинейных уравнений неравенств Винтнера и Лозинского.

Теорема 9.1 [29]. Пусть функции $a_{ij}(t,X(t))$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, непрерывны. Решение задачи Коши (9.1), (9.2) удовлетворяет неравенствам

$$\exp\{-\int_0^t \Lambda(-A(\tau,X(\tau)))d\tau\}\|X_0\| \leq \|X(t)\| \leq$$

$$\leq \exp\{\int_0^t \Lambda(A(\tau,X(\tau)))d\tau\}\|X_0\|, \tag{9.5}$$

где $X_0 = X(0) = (x_1^0,\ldots,x_n^0), X(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$.

Теорема 9.2 [29]. Пусть функции $a_{ij}(t,X(t))$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, непрерывны. Решение задачи Коши (9.1), (9.2) удовлетворяет неравенствам

$$\exp\{\int_0^t \lambda_m(\mathrm{ReA}(\tau,\mathrm{X}(\tau)))\mathrm{d}\tau\}\|\mathrm{X}_0\| \leq \|\mathrm{X(t)}\| \leq$$

$$\leq \exp\{\int_0^t \lambda_M(\mathrm{ReA}(\tau,\mathrm{X}(\tau)))\mathrm{d}\tau\}\|\mathrm{X}_0\|,$$

где $X_0 = X(0)$, $\lambda_m(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau))) = \inf\sigma(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau)))$,
$\lambda_M(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau))) = \sup\sigma(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau)))$, через $\sigma(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau)))$ обозначен спектр оператора $\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau)) = \frac{1}{2}[A(\tau,X(\tau)) + A^*(\tau,X(\tau))]$.

Доказательство теоремы 9.1. Для определенности положим, что элементы $a_{kl}(t,X(t))$ матрицы $A(t,X(t))$ заданы выражением (9.3).

Зафиксируем два произвольных положительных как угодно малых числа ϵ_0 и ϵ_1. Обозначим через $\varphi(t)$ непрерывную положительную функцию такую, что выполняются неравенства $\sup\limits_{0\le t<\infty}\varphi(t)<\epsilon_0$, $\int\limits_0^\infty \varphi(t)dt<\epsilon_1$.

Исследуем поведение траектории задачи Коши (9.1)–(9.2) в промежутке времени $t\in[T,T+\Delta T_0]$, где $T-$ произвольный момент времени $(0\le T<\infty)$, а величина ΔT_0 будет уточнена ниже.

Представим систему уравнений (9.1) следующим образом:

$$\frac{dx_l(t)}{dt}=\sum_{k=1}^n a_{lk}(T,X(T))x_k(t)-\sum_{k=1}^n a_{lk}(T,X(T))(x_k(t)-x_k(T))+$$
$$+\left(a_l(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))-a_l(T,x_1(T),\ldots,x_n(T))\right), \qquad (9.6)$$

$l=1,2,\ldots,n$.

Система (9.6) в операторной форме имеет вид

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(T,X(T))X(t)+F(t,X(t)), \qquad (9.7)$$

где

$$F(t,X(t))=(f_1(t,X(t)),\ldots,f_n(t,X(t)))-$$

вектор с компонентами

$$f_l(t,X(t))=(a_l(t,X(t))-a_l(T,X(T))-\sum_{k=1}^n a_{lk}(T,X(T))(x_k(t)-x_k(T))),$$

$l=1,2,\ldots,n$.

Решение задачи Коши (9.7), (9.2) при $t\ge T$ имеет вид

$$X(t)=e^{A(T,X(T))(t-T)}X(T)+\int\limits_T^t e^{A(T,X(T))(t-s)}F(s,X(s))ds. \qquad (9.8)$$

Переходя к нормам, имеем:

$$\|X(t)\|\le e^{\Lambda(A(T,X(T)))(t-T)}\|X(T)\|+$$
$$+\int\limits_T^t e^{\Lambda(A(T,X(T)))(t-s)}\|F(s,X(s))\|ds. \qquad (9.9)$$

Так как по предположению функции $a_l(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))$ $(l=1,2,\ldots,n)$ непрерывны и $\|X(T)\|\ne 0$, то найдется такое ΔT_0^*, что в промежутке времени $T\le t\le T+\Delta T_0^*$

$$\|F(t,X(t))\|\le\frac{1}{2}\varphi(t)\|X(t)\|. \qquad (9.10)$$

Введем функцию

$$\psi(t) = e^{-\Lambda(A(T,X(T)))t}\|X(t)\|.$$

Тогда из неравенств (9.9) и (9.10) следует, что на сегменте $[T, T+\Delta T_0^*]$ справедливо неравенство

$$\psi(t) \leq \psi(T) + \frac{1}{2}\int\limits_T^t \psi(s)\varphi(s)ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем:

$$\psi(t) \leq \psi(T)e^{\frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(s)ds}.$$

Возвращаясь к нормам, приходим к неравенству:

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\Lambda(A(T,X(T)))(t-T) + \frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(s)ds\}\|X(T)\| =$$

$$= \exp\{\int\limits_T^t \Lambda(A(T,X(T)))d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(\tau)d\tau\}\|X(T)\|. \qquad (9.11)$$

Известно, что для любых линейных операторов A и B в банаховом пространстве справедливо неравенство $|\Lambda(A) - \Lambda(B)| \leq \|A - B\|$.

Из непрерывности функций $a_{kl}(t, X(t))$, $k, l = 1, 2, \dots, n$, следует, что элементы матрицы $A(t, X(t))$ непрерывны. Следовательно, существует такой сегмент $[T, T + \Delta T_0^{**}]$, что при $t \in [T, T + \Delta T_0^{**}]$

$$\int\limits_T^t |\Lambda(A(\tau, X(\tau))) - \Lambda(A(T, X(T)))|d\tau \leq \frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Пусть $\Delta T_0 = \min(\Delta T_0^*, \Delta T_0^{**})$. Тогда на сегменте $[T, T + \Delta T_0]$ неравенство (9.11) может быть заменено неравенством

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_T^t (\Lambda(A(\tau, X(\tau))) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T)\|. \qquad (9.12)$$

Последнее неравенство справедливо на сегменте $[T, T_1]$, где $T_1 = T + \Delta T_0$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что существует последовательность сегментов $[T_k, T_{k+1}]$, $k = 1, 2, \cdots$, для которых справедливы неравенства

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_{T_k}^{t}(\Lambda(A(\tau, X(\tau))) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T_k)\|,$$

где $T_k \leq t \leq T_{k+1}$.

Здесь имеются две возможности:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(T_{k+1} - T_k) = \infty$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(T_{k+1} - T_k) < \infty$.

В первом случае при $t \geq T$ имеем

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_{T}^{t}(\Lambda(A(\tau, X(\tau))) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T)\|. \tag{9.13}$$

Рассмотрим вторую возможность. Обозначим через $T^* = T_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(T_{k+1} - T_k)$. Из приведенных выше выкладок следует, что неравенство (9.13) справедливо при $t \in [T, T^*)$. Так как функции $\Lambda(A(t, X(t)))$ и $\varphi(t)$ непрерывны, то переходя в (9.13) к пределу при $t \to T^*$, убеждаемся, что оно справедливо и при $t = T^*$.

Рассмотрим две возможные теперь ситуации: а) $X(T^*) = 0$, б) $X(T^*) \neq 0$. Если $X(T^*) \neq 0$, то здесь также имеются две возможности: а) неравенство (9.13) справедливо при всех $T \leq t \leq \infty$, б) найдется такое значение $T^{**} \geq T^*$, что начиная с $t > T^{**}$ неравенство (9.13) нарушается. Повторяя рассуждения, приведшие к неравенству (9.13), убеждаемся, что существует сегмент $[T^{**}, T^{**} + \Delta T_{**}]$, такой, что при $t \in [T^{**}, T^{**} + \Delta T_{**}]$ справедливо неравенство

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_{T^{**}}^{t}(\Lambda(A(\tau, X(\tau))) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T^{**})\| \leq$$

$$\leq \exp\{\int\limits_{T}^{t}(\Lambda(A(\tau, X(\tau))) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T)\|,$$

т. е. предположение о нарушении неравенства (9.13) при $t = T^{**}$ неверно.

Таким образом, в случае б) неравенство (9.13) справедливо при $t \geq T$.

Если $X(T^*) = 0$, то неравенство (9.13) справедливо при $t \in [T, T^*]$. Тогда из условия $a_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, i = 1, 2, \ldots, n$, следует, что оно справедливо при всех $t \geq T$.

Таким образом, неравенство (9.13) доказано при $t \geq T$ и для произвольных функций $\varphi(t)$.

Из неравенства (9.13) и из произвольности функции $\varphi(t)$ следует, что

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_T^t (\Lambda(A(\tau, X(\tau)))d\tau\}\|X(T)\|. \qquad (9.14)$$

Правое неравенство в выражении (9.5) доказано.

Докажем справедливость левого неравенства.

Исследуем траекторию задачи Коши (9.1)−(9.2) в промежутке времени $t \in [T, T + \Delta T_0]$, где $T-$ произвольный момент времени ($0 \leq T < < \infty$), а величина ΔT_0 будет уточнена ниже. При этом предполагаем, что $\|X(T)\| \neq 0$.

Воспользуемся представлением системы (9.1) в операторной форме (9.7) и записью решения задачи Коши (9.7), (9.3) при $t \geq T$ в виде выражения (9.8). Переходя к нормам на некотором сегменте $[T, T + \Delta T^*]$, при достаточно малых ΔT^* имеем:

$$\|X(t)\| \geq \|e^{A(T,X(T))(t-T)}X(T)\| - \|\int\limits_T^t e^{A(T,X(T))(t-s)}F(s, X(s))ds\| \geq$$

$$\geq e^{-\Lambda(-A(T,X(T))(t-T)}\|X(T)\| - \int\limits_T^t e^{\Lambda(A(T,X(T)))(t-s)}\|F(s, X(s)\|ds. \qquad (9.15)$$

Неравенство

$$\|e^{A(T,X(T))(t-T)}X(T)\| \geq e^{-\Lambda(-A(T,X(T)))(t-T)}\|X(T)\|$$

было получено из неравенства

$$\|X(T)\| = \|e^{(A(T,X(T))-A(T,X(T)))(t-T)}X(T)\| \leq$$
$$\leq \|e^{-A(T,X(T))(t-T)}\|\|e^{A(T,X(T))(t-T)}\|\|X(T)\| \leq$$
$$\leq e^{\Lambda(-A(T,X(T)))(t-T)}\|e^{A(T,X(T))(t-T)}X(T)\|.$$

Отметим также, что за счет выбора величины ΔT^* можно считать, что в сегменте $[T, T+\Delta T^*]$ выражение, стоящее в правой части неравенства (9.15), положительно.

Из построения функции $F(s, X(s))$ ($F(T, X(T)) = 0$) следует, что существует такое значение ΔT^{**} ($\Delta T^{**} < \Delta T^{*}$), что при $s \in [T, T+\Delta T^{**}]$

$$e^{\Lambda(A(T,X(T)))(t-s)}\|F(s, X(s))\| \leq e^{-\Lambda(-A(T,X(T)))(t-T)}\varphi(s)\|X(T)\|,$$

где $\varphi(t)-$ функция, введенная выше.

Тогда

$$\|X(t)\| \geq e^{-\Lambda(-A(T,X(T)))(t-T)}(1 - \int\limits_T^t \varphi(s)ds)\|X(T)\|.$$

При достаточно малых значениях

$$\int\limits_T^t \varphi(s)ds$$

$$1 - \int\limits_T^t \varphi(s)ds \geq \exp\{-2\int\limits_T^t \varphi(s)ds\}.$$

Следовательно,

$$\|X(t)\| \geq e^{-\Lambda(-A(T,X(T)))(t-T)-2\int\limits_T^t \varphi(s)ds}\|X(T)\|.$$

Из свойств логарифмической нормы следует, что существует такой интервал времени $[T_0, T_1]$, где $T_0 = T$, $T_1 - T_0 < \Delta T^{**}$, что

$$|\int\limits_{T_0}^t (\Lambda(-A(T, X(T)) - \Lambda(-A(t, X(t)))dt| \leq \int\limits_{T_0}^t \varphi(s)ds.$$

Тогда при $T_0 \leq t \leq T_1$

$$\|X(t)\| \geq \exp\{-\int\limits_{T_0}^t (\Lambda(-A(t, X(t))) - 3\varphi(t))dt\}\|X(T_0)\|.$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность значений T_k, таких, что в сегменте $[T_k, T_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots :$

$$\|X(t)\| \geq \exp\{-\int\limits_{T_k}^t (\Lambda(-A(t, X(t))) - 3\varphi(t))dt\}\|X(T_k)\|.$$

Обозначим через T^* сумму

$$T^* = T_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(T_k - T_{k-1}).$$

Здесь имеются две возможности: $T^* = \infty$ и $T^* < \infty$.

В первом случае при всех $T_0 \le t < \infty$

$$\|X(t)\| \ge \exp\{-\int\limits_{T_0}^{t}(\Lambda(-A(t,X(t)))dt - 3\int\limits_{T_0}^{t}\varphi(t)dt\}\|X(T_0)\|. \qquad (9.16)$$

Во втором случае неравенство (9.16) выполняется при $t \in [T_0, T^*]$. Предположим, что существует такое $T^{**} \ge T^*$, начиная с которого неравенство (9.16) нарушается, т. е. при T^{**} оно справедливо, а при $t > T^{**}$ нарушается. Тогда положив $T_0 = T^{**}$ и повторяя проведенные выше выкладки, убеждаемся, что при $t = T^{**}$ неравенство (9.16) не нарушается.

Таким образом, неравенство (9.16) справедливо при всех $t \in [T_0, \infty)$. Из произвольности функции $\varphi(t)$ следует справедливость неравенства

$$\|X(t)\| \ge \exp\{-\int\limits_{T_0}^{t}(\Lambda(-A(t,X(t)))dt\}\|X(T_0)\|.$$

Доказана справедливость левой части неравенства (9.5).

Теорема доказана.

Теорема 9.2 доказывается аналогично. Поэтому остановимся только на моментах, в которых доказательство теоремы 9.2 отлично от доказательства теоремы 9.1.

Воспользовавшись неравенством (9.8) и оценкой

$$\|e^{A(t-t_0)}\| \le \exp\{\lambda_M(\mathrm{Re}A)(t-t_0)\},$$

имеем

$$\|X(t)\| \le e^{\lambda_M(\mathrm{Re}A(T,X(T))(t-T)}\|X(T)\| + \int\limits_{T}^{t} e^{\lambda_M(\mathrm{Re}A(T,X(T))(t-s)}\|F(s,X(s))\|ds.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 9.1, приходим к неравенству

$$\|X(t)\| \le \exp\{\lambda_M(\mathrm{Re}A(T,X(T))(t-T)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{T}^{t}\varphi(s)ds\}\|X(T)\| =$$

$$= \exp\{\int_T^t \lambda_M(\mathrm{Re}A(T,X(T)))d\tau + \frac{1}{2}\int_T^t \varphi(\tau)d\tau\}\|X(T)\|,$$

справедливому на сегменте $[T, T+\Delta T_0^*]$.

Из непрерывности функций $a_{kl}(t,X(t))$, $k,l = 1,2,\ldots,n$, следует, что существует такой сегмент $[T, T+\Delta T_0^{**}]$, $\Delta T_0^{**} \le \Delta T_0^*$, что при $t \in [T, T+ + \Delta T_0^{**}]$

$$\int_T^t (\lambda_M(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau))) - \lambda_M(\mathrm{Re}A(T,X(T))))d\tau \le \frac{1}{2}\int_T^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Пусть $\Delta T_0 = \min(\Delta \mathrm{T}_0^*, \Delta \mathrm{T}_0^{**})$. Тогда на сегменте $[T, T+\Delta T_0]$ справедливо неравенство

$$\|X(t)\| \le \exp\{\int_T^t (\lambda_M(\mathrm{Re}A(\tau,X(\tau))) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T)\|.$$

Завершается доказательство теоремы 9.2 практически дословным повторением соответствующих выкладок, проведенных при доказательстве теоремы 9.1.

Замечание. Случаи, когда матрица $A(t,X(t))$ определяется другими способами, исследуются аналогично.

10. Об одном приеме расширения области структурной устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + f_i(t,x_1,\ldots,x_n), \tag{10.1}$$

где функции $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,2,\ldots,n$, непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным в окрестности нуля и справедливы тождества $f_i(t,0,\ldots,0) \equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\frac{\partial f_i(t,0,\ldots,0)}{\partial x_j} \equiv 0$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Исследование структурной устойчивости будем проводить в пространствах R_n с одной из стандартных метрик.

Пусть $\alpha_i \ne 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Введем функции y_i, $i = 1,2,\ldots,n$, связанные с функциями x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, формулами

$$x_i = \alpha_i y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{10.2}$$

Тогда система уравнений (10.1) преобразуется к системе

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) y_i(t) + g_i(t, y_1, \dots, y_n), \tag{10.3}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, где $b_{ij}(t) = \frac{a_{ij}(t)}{\alpha_i}\alpha_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $g_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) = = \frac{1}{\alpha_i} f_i(t, \alpha_1 y_1(t), \dots, \alpha_n y_n(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим через $B(t)$ матрицу $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 10.1. Пусть существует такой набор констант α_i, $i = 1, 2, \dots, n$, что при любом t $(0 \le t < \infty)$ логарифмическая норма матрицы $B(t)$ удовлетворяет неравенству $\Lambda(B(t)) \le \beta(t) < \beta, \quad \beta < 0$.

Тогда тривиальное решение системы уравнений (10.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Введем обозначение $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, $G(t, Y(t)) = (g_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \dots, g_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$.
Тогда система уравнений (10.3) в операторной форме имеет вид

$$\frac{dY(t)}{dt} = B(t)Y(t) + G(t, Y(t)). \tag{10.4}$$

Доказательство устойчивости решения системы уравнений (10.4) проведем от противного. Пусть $\|Y(0)\| = r_0 \ne 0$ и пусть при $t > T$ траектория системы (10.4) покидает сферу $S(0, r_1)$, где $r_1 = 2r_0$. Представим уравнение (10.4) в виде

$$\frac{dY(t)}{dt} = B(T)Y(t) + G_1(t, Y(t)), \tag{10.5}$$

где $G_1(t, Y(t)) = (B(t) - B(T))Y(t) + G(t, Y(t))$.

Решение уравнения (10.5) при $t \ge T$ можно записать в виде

$$Y(t) = e^{B(T)(t-T)} Y(T) + \int_T^t e^{B(T)(t-s)} G_1(s, Y(s)) ds. \tag{10.6}$$

Из условий, налагаемых на функции $f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ и $a_i(t)$, $i = = 1, 2, \dots, n$, следует, что для любого ϵ $(\epsilon > 0)$ существует такой радиус r_0 и промежуток времени ΔT, что

$$\|G_1(t, Y(t))\| \le \frac{\epsilon}{2} \|Y(t)\| \tag{10.7}$$

при $t \in [T, T + \Delta T]$.

Переходя в (10.6) к нормам, имеем:

$$\|Y(t)\| \leq e^{\Lambda(B(T))(t-T)}\|Y(T)\| + \int\limits_T^t e^{\Lambda(B(T))(t-s)}\|G_1(s, Y(s))\|ds. \qquad (10.8)$$

Воспользовавшись неравенством (10.7), усилим неравенство (10.8):

$$\|Y(t)\| \leq e^{\Lambda(B(T))(t-T)}\|Y(T)\| + \frac{\epsilon}{2}\int\limits_T^t e^{\Lambda(B(T))(t-s)}\|Y(s)\|ds. \qquad (10.9)$$

Введем обозначение

$$\varphi(t) = \|Y(t)\|e^{-\Lambda(B(T))t}.$$

Тогда неравенство (10.9) можно представить в виде

$$\varphi(t) \leq \varphi(T) + \frac{\epsilon}{2}\int\limits_T^t \varphi(s)ds. \qquad (10.10)$$

Применяя к (10.10) неравенство Гронуолла – Беллмана и возвращаясь к нормам, имеем:

$$\|Y(t)\| \leq e^{(\Lambda(B(T))+\frac{\epsilon}{2})(t-T)}\|Y(T)\| \leq$$
$$\leq e^{-(\beta-\frac{\epsilon}{2})(t-T)}\|Y(T)\|.$$

Отсюда следует, что тривиальное решение системы уравнений (10.3), а следовательно, и системы уравнений (10.1) устойчиво.

Асимптотическая устойчивость доказывается дословным повторением рассуждений, неоднократно проведенных в предыдущих разделах данной главы.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 10.1 могут быть усилены.

Введем функции $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, связанные с функциями $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, формулами

$$x_i(t) = \alpha_i(t)y_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (10.11)$$

где $\alpha_i(t)$– непрерывно дифференцируемая функция, на которую налагается условие $|\alpha_i(t)| \geq \gamma > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда система уравнений (10.1) преобразуется к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) y_i(t) + g_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{10.12}$$

где $b_{ij}(t) = \frac{a_{ij}(t)}{\alpha_i(t)} \alpha_j(t)$, $i \neq j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $b_{ii}(t) = a_{ii}(t) - \frac{\alpha_i'(t)}{\alpha_i(t)}$, $i =$
$= 1, 2, \dots, n$,

$$g_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) = \frac{1}{\alpha_i(t)} f_i(t, \alpha_1(t) y_1(t), \dots, \alpha_n(t) y_n(t)),$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим через $B(t)$ матрицу $B(t) = b_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 10.2. Пусть существует такой набор непрерывно дифференцируемых функций $\alpha_i(t)$, $|\alpha_i(t)| \geq \gamma > 0$, при $t \in [0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$, что при любом значении $t (0 \leq t < \infty)$ логарифмическая норма матрицы $B(t)$ удовлетворяет неравенству $\Lambda(B(t)) \leq \beta(t) < -\beta, \quad \beta < 0$.
Тогда тривиальное решение системы уравнений (10.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство подобно доказательству предыдущей теоремы и поэтому опускается.

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и в случае замены вектора неизвестных $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ вектором $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ по формуле $X(t) = C(t) Y(t)$, где $C(t) = \{c_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, – непрерывно обратимая матрица, состоящая из непрерывно дифференцируемых функций и удовлетворяющая при всех $t \in [0, \infty)$ условиям: $0 < \alpha \leq \|C(t)\|, \quad \|C^{-1}(t)\| \leq \beta < \infty$.

11. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений второго порядка

В этом разделе предложены критерии устойчивости решений систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, основанные на исследовании спектров и логарифмических норм семейств специальным образом построенных матриц. Получены критерии устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, выраженные через коэффициенты при неизвестных функциях и их первых производных.

11.1. Задача Коши для систем линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y_k(t)}{dt^2} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(t)y_l(t) + \sum_{l=1}^{n} b_{kl}(t)y_l'(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{11.1}$$

с начальными условиями

$$y_k(t_0) = y_k,\ y_k'(t_0) = y_k^*, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.2}$$

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (11.1).

Для этого сведем систему уравнений (11.1) к системе, состоящей из $2n$-уравнений с $2n$-неизвестными, воспользовавшись подстановкой:

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = c_k y_k(t) + d_k x_k(t),\ d_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.3}$$

Здесь $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n,$ – новые неизвестные функции; c_k, d_k, $k = 1, 2, \ldots, n,$ – коэффициенты, значения которых определены ниже.

Из выражения (11.3) следует, что

$$\frac{d^2y_k(t)}{dt^2} = c_k^2 y_k(t) + c_k d_k x_k(t) + d_k \frac{dx_k(t)}{dt}. \tag{11.4}$$

Подставляя (11.3) и (11.4) в (11.1) и проделав элементарные выкладки, имеем:

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = c_k y_k(t) + d_k x_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}^*(t)y_l(t) + \sum_{l=1}^{n} b_{kl}^*(t)x_l(t),\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.5}$$

Здесь

$a_{kl}^*(t) = \frac{1}{d_k}(a_{kl}(t) + b_{kl}(t)c_l)$ при $k \neq l$,

$a_{kk}^*(t) = \frac{1}{d_k}(a_{kk}(t) + b_{kk}(t)c_k) - \frac{c_k^2}{d_k}$; $b_{kl}^*(t) = \frac{1}{d_k} b_{kl}(t) d_l$ при $k \neq l$,

$b_{kk}^*(t) = b_{kk}(t) - c_k$.

Введем обозначение

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n}) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда систему уравнений (11.5) можно представить в виде

$$\frac{dz_k}{dt} = c_k z_k(t) + d_k z_{n+k}(t),\ k = 1, 2, \ldots, n; \tag{11.6}$$

$$\frac{dz_{n+k}}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a^*_{kl}(t) z_l(t) + \sum_{l=1}^{n} b^*_{kl}(t) z_{n+l}(t),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

а начальные значения (11.2) можно записать в виде

$$z_k(t_0) = z_k,\ k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{11.7}$$

Исследуем устойчивость тривиального решения системы (11.1).

Теорема 11.1. Пусть существуют наборы констант c_k и d_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, такие, что при любом произвольном t ($t_0 \le t < \infty$) выполняются следующие неравенства:

$$c_k < 0,\ |c_k| > |d_k| > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n; \tag{11.8}$$

$$b^*_{kk}(t) < -\alpha,\ \alpha > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n; \tag{11.9}$$

$$|b^*_{kk}(t)| > \sum_{l=1, l\neq k}^{n} |b^*_{kl}(t)| + \sum_{l=1}^{n} |a^*_{kl}(t)|,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.10}$$

Тогда тривиальное решение системы уравнений (11.1) устойчиво в целом.

Теорема 11.1 является частным случаем теоремы 11.2 и поэтому ее доказательство опускается.

Рассмотрим, какие условия налагают критерии теоремы 11.1 на функции $a_k(t)$ и $b_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Для этого представим условие (11.10) следующим образом:

$$|b_{kk}(t) - c_k| - \sum_{l=1, l\neq k}^{n} \frac{1}{|d_k|} |b_{kl}(t) d_l| -$$

$$- \sum_{l=1}^{n} |\frac{1}{d_k} a_{kl}(t) + b_{kl}(t) c_l - \delta_{kl} c_k^2)| > 0, \tag{11.11}$$

где δ_{kl}— символ Кронекера.

Очевидно, что в ряде случаев можно подобрать такие константы c_k и d_k, что будут выполняться неравенства (11.8), (11.9) и (11.11).

Таким образом, условия (11.8) и (11.11) являются достаточными для устойчивости тривиального решения системы уравнений (11.1).

11.2. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2y_k(t)}{dt^2} = g_k(t, y_1(t), \ldots, y_n(t), y_1'(t), \ldots, y_n'(t)), \qquad (11.12)$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, при начальных условиях

$$y_k(t_0) = y_k,\ y_k'(t_0) = y_k^*,\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11.13)$$

Пусть выполнены условия $g_k(t, 0, \ldots, 0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Кроме того, будем считать, что решение системы (11.12) при любых начальных условиях из некоторой окрестности нуля существует при $t_0 \leq \leq t < \infty$.

Как и в предыдущем пункте, сведем систему уравнений (11.12) к системе, состоящей из $2n$-уравнений первого порядка.

Для этого введем новые неизвестные функции $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, определяемые формулой:

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = c_k y_k(t) + d_k x_k(t),\ d_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (11.14)$$

в которой константы c_k и d_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ определены ниже.

Подставив (11.14) в (11.12), имеем:

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = c_k y_k(t) + d_k x_k(t);$$

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = g_k^*(t, y_1(t), \ldots, y_n(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (11.15)$$

$$g_k^*(t, y_1(t), \ldots, y_n(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{1}{d_k} g_k(t, y_1(t), \ldots, y_n(t), c_1 y_1(t) +$$

$$+ d_1 x_1(t), \ldots, c_n y_n(t) + d_n x_n(t)) - \frac{c_k^2}{d_k} y_k(t) - c_k x_k(t).$$

Введем вектор $Z(t) = (z_1(t), \ldots, z_{2n}(t))$, где $(z_1(t), \ldots, z_n(t)) = = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $(z_{n+1}(t), \ldots, z_{2n}(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ и представим систему уравнений (11.15) в виде

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \tilde{G}^*(t, Z(t)), \qquad (11.16)$$

где $\tilde{G}^*(t,Z(t)) = (\tilde{g}_1^*(t,Z(t)),\dots,\tilde{g}_{2n}^*(t,Z(t)))$, $\tilde{g}_k^*(t,Z(t)) =$ $= c_k z_k(t) + d_k z_{n+k}(t)$, $\tilde{g}_{n+k}^*(t,Z(t)) = g_k^*(t,Z(t))$, $k = 1,2,\dots,n$.

Аналогичным образом начальные условия (11.13) можно представить в виде

$$z_k(t_0) = z_k,\ k = 1,2,\dots,2n. \tag{11.17}$$

Из устойчивости тривиального решения системы уравнений (11.16) следует устойчивость тривиального решения системы уравнений (11.12).

Введем матрицу

$$F(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t)) = \{f_{kl}(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))\},\ k,l = 1,2,\dots,2n,$$

где элементы $f_{kl}(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))$ определяются по формуле

$$f_{kl}(t,Z(t)) = \begin{cases} \frac{\tilde{g}_k^*(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))}{m z_l(t)}, & z_l(t) \neq 0, \\ s_{kl}(t), & z_l(t) = 0, \end{cases}$$

где $s_{kl}(t) = \lim\limits_{z_l(t)\to 0} \frac{g_k^*(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))}{z_l(t)}$, если предел существует, или $s_{kl}(t) = 0$, если предел не существует. Здесь $m-$ число отличных от нуля элементов в векторе $Z(t)$.

Возможны и другие способы построения матрицы $F(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))$. Некоторые из них можно ввести по аналогии с описанными в разделах $2-8$. Например, матрицу F можно построить следующим образом:

$$f_{kl}(t,Z(t)) = \begin{cases} \frac{\tilde{g}_k^*(t,0,\dots,0,z_l(t),\dots,z_{2n}(t)) - \tilde{g}_k^*(t,0,\dots,0,z_{l+1}(t),\dots,z_{2n}(t))}{z_l(t)}, & z_l(t) \neq 0, \\ 0, & z_l(t) = 0. \end{cases}$$

$k,l = 1,2,\dots,2n$.

Сформулируем критерии устойчивости тривиального решения уравнения (11.12).

Теорема 11.2. Пусть существуют константы c_k, d_k, $k = 1,2,\dots,n$, и δ $(0 < \delta)$ такие, что при любых значениях t $(t_0 \le t < \infty)$ логарифмическая норма $\Lambda(F(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t)))$ матрицы $F(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))$ меньше нуля при $\|Z(t)\| \le \delta$. Тогда тривиальное решение системы уравнений (11.16) устойчиво.

Теорема 11.3. Пусть существуют константы c_k, d_k, $k = 1,2,\dots,n$, и δ $(\delta > 0)$ такие, что при любых значениях t $(t_0 \le t < \infty)$ $\sigma(\mathrm{Re}F(t,z_1(t),\dots,z_{2n}(t))) < 0$ при $\|Z(t)\| \le \delta$. Тогда тривиальное решение системы уравнений (11.16) устойчиво.

Теорема 11.4. Пусть δ_0 $(\delta_0 > 0)-$ фиксированное число и выполнены следующие условия:

1) функции $\tilde{g}_k^*(t, z_1(t), \ldots, z_{2n}(t))$ равномерно непрерывны по первой переменной при всех t $(t_0 \leq t \leq \infty)$ в шаре $R(0, \delta_0)$ (т. е. для любого ϵ существует такое Δ, что $|\tilde{g}_k^*(t_1, v_1, \ldots, v_{2n}) - \tilde{g}_k^*(t_2, v_1, \ldots, v_{2n})| \leq \epsilon$, как только $|t_1 - t_2| \leq \Delta$ при любых $(v_1, \ldots, v_{2n}) \in R(0, \delta_0)$);

2) при любом фиксированном значении t $(t_0 \leq t \leq \infty)$ функции $\tilde{g}_k^*(t, v_1, \ldots, v_{2n})$ равномерно непрерывны по переменным $(v_1, \ldots, v_{2n})$ в шаре $R(0, \delta_0)$;

3) норма матрицы $F(t, Z)$ равномерно ограничена константой при любых t $(t_0 \leq t \leq \infty)$ и $Z \in R(0, \delta_0)$;

4) существуют константы c_k, d_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и δ_* $(0 < \delta_* \leq \delta_0)$ такие, что при любых значениях t $(t_0 \leq t < \infty)$ в шаре $R(0, \delta_*)$ логарифмическая норма $\Lambda(F(t, Z(t))) < -\alpha^*$, $\alpha^* > 0$.

Тогда тривиальное решение системы уравнений (11.16) асимптотически устойчиво.

Замечание. Вместо констант c_k, d_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, можно взять непрерывно дифференцируемые функции $c_k(t)$ и $d_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Нетрудно описать изменения, которые при этом вносятся в системы дифференциальных уравнений (11.15) и (11.16). Так же нетрудно внести соответствующие изменения в формулировки теорем 11.2 – 11.4.

Приступим к доказательству теорем.

Доказательство теоремы 11.2. Пусть δ_0 $(\delta_0 > 0)-$ произвольное положительное число. Покажем, что траектория решения системы уравнений (11.16), начавшаяся в шаре $R(0, \delta_0)$, не покидает шара $R(0, \delta_1)$, где $\delta_1 = 2\delta_0$. Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория решения системы уравнений (11.16) находится на сфере $S(0, \delta_1)$ и при $t > T$ покидает эту сферу, проходя через точку
$Z(T) = (z_1(T), \ldots, z_{2n}(T))$.

Представим систему уравнений (11.16) в виде

$$\frac{dZ(t)}{dt} = F(T, Z(T))Z(t) + H(t, Z(t)), \tag{11.18}$$

где

$$H(t, Z(t)) = (h_1(t, Z(t)), \ldots, h_{2n}(t, Z(t))),$$

$$H(t, Z(t)) = \tilde{G}^*(t, Z(t)) - \tilde{G}^*(T, Z(T)) - F(T, Z(T))(Z(t) - Z(T)).$$

Уравнение (11.18) при $t \geq T$ эквивалентно интегральному уравнению

$$Z(t) = \exp\{F(T, Z(T))(t-T)\}Z(T)+$$

$$+\int\limits_T^t \exp\{F(T, Z(T))(t-s)\}H(s, Z(s))ds. \qquad (11.19)$$

По условию теоремы логарифмическая норма матрицы $F(t, Z(t))$ отрицательна при любом t ($t_0 \leq t < \infty$). Пусть $\Lambda(F(T, Z(T))) = -\alpha(T)$, $\alpha(T) > 0$.

Из построения оператора $H(t, Z(t))$ следует, что существует промежуток времени ΔT, такой, что при $t \in [T, T+\Delta T]$ $\|H(t, Z(t))\| \leq \beta\|Z(t)\|$, где $\beta < \alpha(T)$.

Переходя в (11.19) к нормам, имеем:

$$\|Z(t)\| \leq \exp\{\Lambda(F(T, Z(T)))(t-T)\}\|Z(T)\|+$$

$$+\int\limits_T^t \exp\{\Lambda(F(T, Z(T)))(t-s)\}\|H(s, Z(s))ds$$

и, следовательно,

$$\|Z(t)\| \leq e^{-\alpha(T)(t-T)}\|Z(T)\| + \int\limits_T^t \beta e^{-\alpha(T)(t-s)}\|Z(s)\|ds.$$

Умножим обе части предыдущего неравенства на $e^{\alpha(T)t}$ и введем функцию $\varphi(t) = \|Z(t)\|e^{\alpha(T)t}$. Тогда

$$\varphi(t) \leq \varphi(T) + \int\limits_T^t \beta\varphi(s)ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла – Беллмана и возвращаясь к нормам, имеем:

$$\|Z(t)\| \leq \exp\{(-\alpha(T)+\beta)(t-T)\}\|Z(T)\|.$$

Так как $-\alpha(T)+\beta < 0$, то при $t \in [T, T+\Delta T]$ $\|Z(t)\| < \|Z(T)\|$. Следовательно, получено противоречие и траектория решения системы уравнений (11.16) не покидает шара $R(0, \delta_1)$.

Устойчивость решения системы уравнений (11.12) доказана.

Доказательство теоремы 11.3 проводится аналогично.

Доказательство теоремы 11.4. Повторяя проведенные при доказательстве теоремы 11.2 рассуждения, доказываем существование последовательности $T_0 = t_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, такой, что при $t, T_k \le t \le T_{k+1}$, $\|Z(t)\| \le e^{-\alpha(t-T_k)/2}\|Z(T_k)\|$.

Имеются две возможности в поведении последовательности T_k, $k = 0, 1, \ldots$

Первая возможность: $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$. В этом случае $\|Z(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Вторая возможность: $T_k \to T^* \ne \infty$ при $k \to \infty$.

Предположим, что при этом $\|Z(t)\| \not\to 0$ при $t \to \infty$. Так как скалярная функция $\|Z(t)\|$ монотонно убывает, то существует $\inf\limits_{t_0 \le t < \infty} \|Z(t)\| = \gamma \ne 0$. Зафиксируем ϵ, $\epsilon > 0$, величина которого определена ниже.

Величина ϵ подбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство $(\gamma + \epsilon)e^{-\alpha\Delta_3/2} < \gamma$. Здесь Δ_3- константа, зависящая от гладкости функций, входящих в правую часть системы (11.16) и определенная ниже. Пусть в момент времени T_{γ^*} $\|Z(T_{\gamma^*})\| = \gamma + \epsilon = \gamma^*$.

Возьмем T_{γ^*} в качестве начального значения и представим решение системы уравнений (11.16) в виде интегрального уравнения

$$Z(t) = \exp\{\Lambda(F(T_{\gamma^*}, Z(T_{\gamma^*})))(t - T_{\gamma^*})\} +$$

$$+ \int\limits_{T_{\gamma^*}}^{t} \exp\{\Lambda(F(T_{\gamma^*}, Z(T_{\gamma^*}))(t - s))\}H(s, Z(s))ds. \tag{11.20}$$

Оценим норму $\|H(s, Z(s))\|$ в шаре $R(0, \delta_1)$.

Очевидно,

$$\|H_k(t, Z(t))\| = \|\tilde{g}_k^*(t, Z(t)) - \tilde{g}_k^*(T, Z(T)) -$$

$$- \sum_{l=1}^{2n} f_{kl}(T, Z(T))(z_l(t) - z_l(T))\| \le$$

$$\le \|\tilde{g}_k^*(t, Z(t)) - \tilde{g}_k^*(T, Z(t))\| + \|g_k^*(T, Z(t)) - g_k^*(T, Z(T))\| +$$

$$+ \|\sum_{l=1}^{2n} f_{kl}(T, Z(T))(z_l(t) - z_l(T))\| = r_1 + r_2 + r_3.$$

Из условий теоремы следует, что для любого ϵ_1 ($\epsilon_1 > 0$) найдется такое Δ_1, что равномерно для всех $Z \in R(0, \delta_1)$, $\|\tilde{g}_k^*(t, Z) - \tilde{g}_k^*(T, Z)\| \leq \epsilon_1$ при $|t - T| \leq \Delta_1$. Для оценки r_2 заметим, что по условию теоремы функция $\tilde{g}_k^*(T, z_1, \dots z_{2n})$ является непрерывной по переменным $z_1, \dots, z_{2n}$ в шаре $R(0, \delta_1)$. Следовательно, функция $\tilde{g}_k^*(T, z_1, \dots, z_{2n})$ является равномерно непрерывной в шаре $R(0, \delta_1)$, т. е. для любого ϵ_2 существует такое Δ_2, что при $\|Z_1 - Z_2\| \leq \Delta_2$ $\quad |\tilde{g}^*(T, Z_1) - \tilde{g}^*(T, Z_2)| \leq \epsilon_2$ при любых $Z_1, Z_2 \in R(0, \delta_1)$.

Так как по условию теоремы $\|F(t, Z)\| \leq K = \text{const}$ при всех t, $t_0 \leq t < \infty$ и всех $Z(t) \in R(0, \delta_1)$, то $\|F(T, Z(T))(Z(t) - Z(T))\| \leq K\|Z(t) - Z(T)\|$.

Из приведенных выше оценок следует, что для любого ϵ_3 ($\epsilon_3 > 0$) существуют такие константы Δ_3 и Δ_4, что при любых t и T, таких, что $|t - T| \leq \Delta_3$, и любых Z_1 и Z_2, таких, что $\|Z_1 - Z_2\| \leq \Delta_4$, справедлива оценка

$$\|H(t, Z(t))\| \leq \epsilon_3 = (\epsilon_3/\gamma^*)\gamma^* = (\epsilon_3/\gamma^*)\|Z(T_{\gamma^*})\|.$$

Выберем теперь ϵ_3 таким образом, чтобы $\epsilon_3/\gamma^* < \alpha/2$. Тогда из равенства (7.20) следует, что при $T_* = T_{\gamma^*} + \Delta_3$ выполняется неравенство

$$\|Z(T_*)\| \leq e^{-\alpha\Delta_3/2}\|Z(T_{\gamma^*})\| \leq e^{-\alpha\Delta_3/2}\gamma^* < \gamma.$$

Из полученного противоречия следует, что $\gamma = 0$. Асимптотическая устойчивость решений системы уравнений (7.16) (а следовательно, и (7.12)) доказана.

12. Устойчивость периодических решений

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)) \tag{12.1}$$

при начальном условии

$$x(t_0) = x_0. \tag{12.2}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \dots, x_l(t))$, $A(t, x(t)) = (a_1(t, x(t)), \dots, a_l(t, x(t)))$, вектор-функция $A(t, u)-$ периодическая с периодом T по переменной t.

Кроме того, будем предполагать, что функция $A(t, u)$ удовлетворяет следующему условию: функция $A(t, u)$ непрерывна по первой переменной и дифференцируема до второго порядка по второй переменной.

Пусть задача Коши (12.1) $-$ (12.2) имеет периодическое решение $x(t)$. Исследуем устойчивость этого решения при возмущениях начального условия.

Через $A'_2(t,u)$ и $A''_2(t,u)$ будем обозначать первую и вторую производные оператора $A(t,u)$ по второму аргументу.

Теорема 12.1. Пусть $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 \le t \le t_0 + T-$ периодическое решение задачи Коши (12.1)–(12.2). Пусть функция $A(t,u)$ непрерывна по первой переменной и имеет частные производные до второго порядка по второй переменной, ограниченные в совокупности константой M при $t_0 \le t \le t_0 + T$ и в δ $(\delta > 0)$ окрестности кривой $\varphi(t)$. Если при каждом значении t, $t_0 \le t \le t_0 + T$, и в каждой точке $x(\tau)$ $t_0 \le \tau \le t_0 + T$ δ-окрестности кривой $\varphi(t)$ $\Lambda(A'(t,x(\tau))) \le -\alpha$, $\alpha > 0$, то периодическое решение $x(t)$ задачи Коши асимптотически устойчиво.

Доказательство. Дадим начальному значению (12.2) приращение Δx_0, такое, что $\|\Delta x_0\| < \delta$ и $\|\Delta x_0\| M < \alpha/4$, где $M = \sup\limits_{u\in\Omega(x,\delta)} \|A''_2(t,u(t))\|$, $\Omega(x,\delta) - \delta$-окрестность траектории $x(t)$. Положим $y_0 = x_0 + \Delta x_0$ и исследуем траекторию решения системы уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t,y(t)); \tag{12.3}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{12.4}$$

Пусть $z = y - x$.

Тогда

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t,x(t)+z(t)) - A(t,x(t)), \tag{12.5}$$

$$z(t_0) = \Delta x_0 = z_0. \tag{12.6}$$

Зафиксируем произвольный момент времени t_1, такой, что $\|z(t_1)\| M \le$ $\le \alpha/4$ и $\|z(t_1)\| < \delta$, и представим систему уравнений (12.5) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= A(t_1,x(t_1)+z(t)) - A(t_1,x(t_1)) + \\ &+ (A(t,x(t)+z(t)) - A(t_1,x(t_1)+z(t))) + \\ &\qquad + (A(t_1,x(t_1)) - A(t,x(t))).\end{aligned} \tag{12.7}$$

Предположим, что функция $A(t,u)$ непрерывна по первой переменной и имеет производную второго порядка по второй переменной.

Тогда систему уравнений (12.7) можно представить в виде операторного уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = A_2'(t_1, x(t_1))z(t) + F(t, t_1, x(t), x(t_1), z(t)), \qquad (12.8)$$

где $A_2'(t,u)$ означает производную по второй переменной, а оператор

$$F(t, t_1, x(t), x(t_1), z(t)) = A(t_1, x(t_1) + z(t)) -$$

$$-A(t_1, x(t_1)) - A_2'(t, x(t_1))z(t) +$$

$$+(A(t, x(t) + z(t)) - A(t_1, x(t_1) + z(t))) +$$

$$+(A(t_1, x(t_1) - A(t, x(t))).$$

Оценим $\|F(t, t_1, x(t), x(t_1), z(t))\|$.

Очевидно,

$$\|A(t_1, x(t_1) + z(t)) - A(t_1, x(t_1)) - A_2'(t, x(t_1))z(t)\| \leq$$

$$\leq \|A_2''(t, x(t_1) + \theta z(t))\| \|z(t)\|^2 \leq M\Delta \|z(t)\| \leq (\alpha/4)\|z(t)\|,$$

где $0 < \theta < 1$.

Из структуры слагаемых

$$(A(t, x(t) + z(t)) - A(t_1, x(t_1) + z(t))) + (A(t_1, x(t_1)) - A(t, x(t)))$$

следует, что существует такой промежуток времени Δt_1, что при $t_1 \leq$ $\leq t \leq t_2 = t_1 + \Delta t_1$

$$\|A(t, x(t) + z(t)) - A(t_1, x(t_1) + z(t)) +$$

$$+(A(t_1, x(t_1)) - A(t, x(t)))\| \leq (\alpha/4)\|z(t)\|.$$

Следовательно, при $t \in [t_1, t_1 + \Delta t_1]$ выполняется неравенство

$$\|F(t, t_1, x(t), x(t_1), z(t))\| \leq \epsilon_1 \|z(t)\|. \qquad (12.9)$$

Решением уравнения (12.8) является функция

$$z(t) = \exp\{\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1))(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)\}\mathrm{z}(\mathrm{t}_1)+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \exp\{\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1))(\mathrm{t}-\mathrm{s})\}\mathrm{F}(\mathrm{s}, \mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{s}), \mathrm{x}(\mathrm{t}_1), \mathrm{z}(\mathrm{s}))\mathrm{ds}. \qquad (12.10)$$

Переходя в (12.10) к нормам, имеем:

$$\|z(t)\| \le \exp\{\Lambda(\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1)))(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)\}\|\mathrm{z}(\mathrm{t}_1)\|+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \exp\{\Lambda(\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1)))(\mathrm{t}-\mathrm{s})\}\|\mathrm{F}(\mathrm{s}, \mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{s}), \mathrm{x}(\mathrm{t}_1), \mathrm{z}(\mathrm{s}))\|\mathrm{ds} \le$$

$$\le \exp\{\Lambda(\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1)))(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)\}\|\mathrm{z}(\mathrm{t}_1)\|+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \exp\{\Lambda(\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1)))(\mathrm{t}-\mathrm{s})\}\frac{\alpha}{2}\|\mathrm{z}(\mathrm{s})\|\mathrm{ds}. \qquad (12.11)$$

Введем функцию

$$\varphi(t) = \|z(s)\|\exp\{-\Lambda(\mathrm{A}_2'(\mathrm{t}_1, \mathrm{x}(\mathrm{t}_1)))\mathrm{t}\}.$$

Тогда неравенство (12.11) можно представить в виде

$$\varphi(t) = \varphi(t_1) + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{t_1}^{t} \varphi(s)ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем:

$$\varphi(t) \le e^{\frac{\alpha}{2}(t-t_1)}\varphi(t_1).$$

Возвращаясь к нормам, получаем неравенство:

$$\|z(t)\| \le \exp\{(\Lambda(A_2'(t_1, x(t_1))) + \frac{\alpha}{2})(t-t_1)\}\|z(t_1)\| \le$$

$$\le \exp\{-\alpha(t-t_1)/2\}\|z(t_1)\|. \qquad (12.12)$$

Из полученного неравенства следует, что траектория задачи Коши (12.3) – (12.4) не выходит при $t \in [t_1, t_2]$ из δ-окрестности траектории задачи Коши (12.1) – (12.2) и, более того, $\|y(t) - x(t)\| \le \delta$ при
$t_1 \le t \le t_2$.

Из произвольности точки t_1 следует устойчивость периодического решения задачи Коши (12.1) − (12.2).

Повторяя приведенные выше рассуждения, можно показать, что существует последовательность интервалов Δt_k, $k = 1, 2, \dots$, таких, что при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо неравенство

$$\|z(t)\| \leq e^{-\alpha(t-t_k)/2}\|z(t_k)\|.$$

Обозначим через T_* сумму

$$T_* = t_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta t_k.$$

Очевидно, при $t \in [t_1, T^*)$ выполняется неравенство

$$\|z(t)\| \leq e^{-\alpha(t-t_1)/2}\|z(t_1)\|. \tag{12.13}$$

Отсюда следует, что если $T_* = \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \|z(t)\| = 0$.

Пусть теперь T_*− конечное число. Так как $z(t) = y(t) - x(t)$− разность решений задач Коши (12.3), (12.4) и (12.1), (12.2), то функция $z(t)$ определена при всех $t \in [t_1, \infty]$. Отсюда следует, что, переходя в (12.13) к пределу, получаем:

$$\|z(T_*)\| \leq e^{-\alpha(T_*-t_1)/2}\|z(t_1)\|.$$

Таким образом, неравенство (12.13) выполняется при $t = T_*$.

Обозначим через T_{**} момент времени, в который неравенство (12.13) нарушается, т. е. при $t = T_{**}$ оно выполняется, а при $t > T_{**}$− нарушается. Взяв T_{**} за начальный момент времени и повторив приведенные выше рассуждения убеждаемся, что при $t > T_{**}$ неравенство (12.13) выполняется.

Таким образом, неравенство (12.13) справедливо при всех значениях t, $t \in [t_1, \infty]$. Отсюда следует, что или $T_* = \infty$ и функция $\|z(t)\|$, монотонно убывая, стремится к нулю, или $T_* = \text{const}$ и $\|z(T^*)\| = 0$, что соответствует возвращению возмущенного движения к первоначальной траектории.

13. Робастная устойчивость

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в n-мерном пространстве R_n :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{13.1}$$

где $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Предположим, что значения элементов $\{a_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $A(t)$ определены в некотором интервале (для каждого элемента $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, свой интервал):

$$\alpha_{ij}(t) \le a_{ij}(t) \le \beta_{ij}(t), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.2}$$

Говорят, что система уравнений (13.1) обладает робастной устойчивостью, если она устойчива при всех значениях элементов $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, определяемых неравенствами (13.2).

Аналогичным образом вводится понятие робастной устойчивости для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Семейство полиномов $P(z, u) = a_0(u) + a_1(u)z + \cdots + a_n(u)z^n$, $a_n \ne 0$, коэффициенты $a_i(u)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, которого зависят от параметров $u \in U$, $U \subset R_l$, $l \le n$, называется робастно устойчивым, если при всех $u \in U$ корни полиномов лежат в левой полуплоскости комплексной переменной.

При проектировании управляющих систем к ним предъявляются жесткие требования. Одним из них является устойчивость функционирования управляющих систем при изменении их параметров и режимов работы. Поэтому при проектировании управляющих систем должен закладываться высокий уровень их робастности.

В 1978 г. опубликованы результаты В. Л. Харитонова [104] по робастности динамических систем, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. С этого момента началось активное исследование робастности динамических систем, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями. Обзоры работ по робастности динамических систем содержатся в [45], [46], [49], [89].

Рассмотрим непрерывную динамическую систему, функционирование которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \tag{13.3}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \tag{13.4}$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n-$ матрица с постоянными элементами.

Хорошо известно, что для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (13.3) необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином

$$f(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \tag{13.5}$$

матрицы A, где $b_i (i = 0, 1, \dots, n-1)-$ действительные числа, имел корни только в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной z.

Если элементы матрицы A заданы в некотором интервале (для каждого элемента a_{ij} свой интервал h_{ij}), то необходимо исследовать корни характеристического полинома (13.5) в предположении, что

$$\alpha_i \le b_i \le \beta_i, i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{13.6}$$

Напомним, что матрицы $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n$, элементы a_{ij} которых лежат в интервалах $[a_{ij} - h_{ij}^1, a_{ij} + h_{ij}^2]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где h_{ij}^l, $l = 1, 2$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, неотрицательные числа, называются интервальными матрицами.

Фундаментальный результат по устойчивости систем дифференциальных уравнений вида (13.3) с интервальными матрицами получен
В. Л. Харитоновым [104], [105].

Приведем его в формулировке работы [45].

Теорема 13.1. Для того чтобы $\Gamma^n \subset G^n$, необходимо и достаточно чтобы $\Gamma_1^n \subset G^n$.

Здесь G^n- множество полиномов вида (13.5), все корни которых лежат в левой половине комплексной плоскости; Γ^n- семейство полиномов (13.5) с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствами (13.6), Γ_1^n- множество тех полиномов из Γ^n, у которых каждый коэффициент b_i, равен либо α_i, либо β_i (т.е. Γ_1^n содержит 2^n полиномов).

Проверка условия $\Gamma_1^n \subset G^n$ требует значительной вычислительной работы.

В связи с этим возникает актуальная проблема построения критериев, требующих меньшей вычислительной работы. Большое число работ было посвящено этой проблеме.

К числу первых работ, выполненных в этом направлении, относится работа [121].

Рассмотрим систему уравнений (13.3), в которой элементы $\alpha_{i,j}$ матрицы A удовлетворяют неравенствам $p_{ij} \le \alpha_{ij} \le q_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 13.2 [121]. Интервальная матрица A устойчива, если

$$q_{ii} + \sum_{i=1, j\neq i}^{n} \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\} < 0, i \in \{\overline{1, n}\}.$$

Теорема 13.3 [121]. Интервальная матрица A устойчива, если

$$q_{ii} + \sum_{i=1, j\neq i}^{n} \max\{|p_{ji}|, |q_{ji}|\} < 0, i \in \{\overline{1, n}\}.$$

Теорема 13.4 [121]. Интервальная матрица A устойчива, если существуют положительные числа $r_1 = 1, r_2, \ldots, r_n$, такие, что

$$q_{ii} + \sum_{i=1, j\neq i}^{n} \frac{r_i}{r_j} \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\} < 0, i \in \{\overline{1, n}\}.$$

Теорема 13.5 [121]. Интервальная матрица A устойчива, если существуют положительные числа $r_1 = 1, r_2, \ldots, r_n$, такие, что

$$q_{ii} + \sum_{i=1, j\neq i}^{n} \frac{r_i}{r_j} \max\{|p_{ji}|, |q_{ji}|\} < 0, i \in \{\overline{1, n}\}.$$

В работе [121] доказательство этих теорем базируется на теореме Гершгорина. Отметим, что эти результаты могут быть получены на основании свойств логарифмической нормы.

Пусть $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, ..., n, -n \times n$ матрица с вещественными элементами.

Обозначим через $A_{\alpha\beta}$ множеств $n \times n$ матриц, элементы которых удовлетворяют неравенствам

$$-\infty < \alpha_{ij} \le a_{ij} \le \beta_{ij} < \infty, i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.7}$$

Обозначим через $\Lambda(A_{\alpha\beta})$ логарифмическую норму семейства матриц $A_{\alpha\beta}$, которая определяется формулой

$$\Lambda(A_{\alpha\beta}) = \sup_{\alpha_{ij} \le a_{ij} \le \beta_{ij}} \Lambda(\{a_{ij}\}, i, j, = 1, 2, \ldots, n).$$

Отметим, что в случае, когда норма матрицы A задается формулой

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\Lambda(A_{\alpha\beta}) = \max_i \left(\beta_{ii} + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} \max(|\alpha_{ij}|, |\beta_{ij}|) \right).$$

Воспользовавшись рассуждениями, приведенными в разделах $1 - 4$, легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 13.6. Тривиальное решение системы уравнений (13.3) с интервальной матрицей $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, ..., n$, элементы которой удовлетворяют неравенствам (13.7), устойчиво (асимптотически устойчиво) если $\Lambda(A_{\alpha\beta}) < 0$ $(\Lambda(A_{\alpha\beta}) < -\gamma, \gamma > 0)$.

Важный критерий устойчивости интервальных матриц получен в работе [14]. Приведем основной результат этой работы.

При формулировке этого результата нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть E_n- вещественное евклидово пространство со скалярным произведением (,); M_n- пространство вещественных квадратных матриц размера $n \times n$. Если $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]-$ матрицы из M_n, то через A^T обозначается транспонированная матрица, через AB обозначается обычное произведение матриц A и B, а через $< A, B > -$ скалярное произведение этих матриц, определяемое формулой

$$< A, B >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

Норма в E_n, порожденная скалярным произведением (,), обозначается через | |, а норма в M_n, порожденная скалярным произведением $<\ ,\ >$, обозначается через $\|\ \|$.

Матрица $A \in M_n$ называется устойчивой, если ее спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ комплексной плоскости z. Дополнение к множеству $S \subset M_n$ устойчивых матриц образует множество $\tilde{S} \subset M_n$ неустойчивых матриц.

Максимальное положительное число $\mu = \mu(A)$, для которого спектр $\sigma(A)$ устойчивой матрицы A лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda \leq -\mu(A)$ называется запасом устойчивости матрицы A.

Пусть $A-$ устойчивая вещественная матрица с запасом устойчивости μ, собственные значения которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, a_1 \pm i b_1, \ldots, a_q \pm i b_q$ различны.

Обозначим через $x_1, \ldots, x_p, y_1 \pm iz_1, \ldots, y_q \pm iz_q$ собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Положим $e_k = x_k (1 \le k \le \le p), e_{p+k} = y_k (1 \le k \le q)$, $e_{p+q+k} = z_k (1 \le k \le q)$ и обозначим через B матрицу Грама, построенную по векторам $e_i (i = 1, \ldots, n)$:

$$B = \begin{bmatrix} (e_1, e_1) \cdots (e_1, e_n) \\ \cdots \\ (e_n, e_1) \cdots (e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть $0 \le \mu_1 \le \ldots \le \mu_n -$ собственные значения матрицы B. Положим

$$\kappa = \frac{\mu_n}{\mu_1}.$$

Величина κ называется мерой обусловленности матрицы B.

Положим,

$$\operatorname{dist}(A, \tilde{A}) = \inf_{A' \in \tilde{S}} \|A - A'\|.$$

Теорема 13.7 [14]. Справедлива оценка

$$\operatorname{dist}(A, \tilde{A}) \ge \mu(A) \frac{2\sqrt{\kappa}}{1 + \kappa}.$$

Рассмотрим систему уравнений (13.1) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0. \tag{13.8}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $-n \times n$ матрица с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(t)$.

Будем считать, что функции $a_{ij}(t)$ удовлетворяют неравенствам (13.2).

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (13.1) при выполнении условий (13.2).

Теорема 13.8. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $\alpha_{ij}(t), \beta_{ij}(t), i, j = 1, 2, \ldots, n, t \in [t_0, \infty)$, ограничены;

2) логарифмическая норма $\Lambda(A_{\alpha\beta}(t)) < 0$ при $t \in [t_0, \infty)$.

Тогда тривиальное решение системы уравнений (13.1) с интервальной матрицей $A_{\alpha\beta}$ устойчиво.

Доказательство теоремы является повторением рассуждений, приведенных в разделах $1 - 4$.

Теорема 13.9. Пусть функции $a_{ij}(t)$ $(\alpha_{ij}(t) \leq a_{ij}(t) \leq \beta_{ij}(t))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны. Решение задачи Коши (13.1), (13.8) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp\{\int\limits_0^t \Lambda(A_{\alpha,\beta}(\tau))d\tau\}.$$

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 9.1 и поэтому опускается.

14. Сверхустойчивость решений дифференциальных и разностных уравнений

В работе [89] дано определение сверхустойчивости для непрерывных систем.

Определение 14.1 [89]. Матрица $A = \{a_{ij}\}$, где a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, – вещественные числа, называется сверхустойчивой, если у нее на диагонали стоят отрицательные числа и они по абсолютной величине превосходят суммы модулей недиагональных членов по строке:

$$\sigma(A) = \sigma = \min_i \left(-a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right) > 0.$$

Замечание. Величина $\sigma(A)$ совпадает с логарифмической нормой в пространстве R_n с нормой $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

Определение 14.2 [89]. Система дифференциальных уравнений называется сверхустойчивой, если соответствующая ей матрица является сверхустойчивой.

Так как в ряде случаев невырожденными преобразованиями можно устойчивую матрицу преобразовать в сверхустойчивую, расширим определение сверхустойчивости, включая сюда понятие сверхустойчивости решений нелинейных уравнений.

Определение 14.3. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = A(t, x(t))$ называется сверхустойчивой, если с помощью невырожденного преобразования $T, x = Ty$ задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t));$$

$$x(t_0) = x_0$$

может быть преобразована в задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = T^{-1}A(t, Ty(t));$$

$$y(t_0) = T^{-1}x_0,$$

траектория которой $y(t)$ не покидает сферу $S(0, \delta_0)$, $\delta_0 = \|y(t_0)\|$.

Определение 14.4. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = A(t, x(t))$ называется асимптотически сверхустойчивой, если с помощью невырожденного преобразования T она может быть преобразована в сверхустойчивую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = T^{-1}A(t, Ty(t)),$$

для которой $\|y(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ при всех траекториях с начальными значениями $y(t_0)$ из $R(0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$.

Определение 14.5. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = A(t, x(t))$ называется сверхустойчивой в целом, если она асимптотически сверхустойчива при любом начальном приближении.

В работе [89] также дано определение сверхустойчивости дискретных систем.

Определение 14.6 [89]. Матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, с вещественными элементами называется дискретно сверхустойчивой, если

$$q = \|A\| = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) < 1, \tag{14.1}$$

а величина $1 - q$ называется степенью дискретной сверхустойчивости A.

Определение 14.7 [89]. Дискретная система

$$x(k) = Ax(k-1) + f(k-1) \tag{14.2}$$

с матрицей A, удовлетворяющей условию (14.1), называется сверхустойчивой.

Как и в случае непрерывных систем, можно ввести понятия сверхустойчивости дискретных систем, обобщающее приведенное выше понятие, а также понятие асимптотической сверхустойчивости и сверхустойчивости в целом дискретных систем.

В работе [89] приведены интересные критерии сверхустойчивости в смысле определений 14.1 и 14.6 непрерывных и дискретных матриц.

Теорема 14.1 [89]. Если $n \times n$ матрица A непрерывной системы сверхустойчива, то ее собственные значения лежат в секторе

$$S_n = \{\lambda \in C : |\mathrm{arg}\lambda - \pi| < (1 - n^{-1})\pi/2\}.$$

Обратно, каждая точка в этом секторе является собственным значением некоторой сверхустойчивой матрицы.

Теорема 14.2 [89]. Множество всех собственных значений дискретно сверхустойчивых $n \times n$ матриц A содержит все внутренние точки правильных многоугольников с $2k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, сторонами, вписанными в единичный круг, одна из вершин которых находится в точке $+1$.

Проблема описания множества всех собственных значений матрицы A близка к проблеме локализации спектра стохастических матриц, поставленной А. Н. Колмогоровым в 1938 г. и решенной в [60].

Из приведенных выше определений сверхустойчивости следует, что большинство результатов, полученных в разделах 3–14 данной главы, можно классифицировать как критерии сверхустойчивости решений соответствующих классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Аналогичным образом можно классифицировать результаты следующей главы как критерии сверхустойчивости решений уравнений в частных производных, а результаты четвертой главы – как методы сверхстабилизации решений обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных.

15. Устойчивость решений дифференциальных уравнений при постоянных возмущениях

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \tag{15.1}$$

где $A = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-$ постоянная матрица.

Пусть $x^* = 0-$ тривиальное решение системы уравнений (15.1). Исследуем его устойчивость.

Пусть система (15.1) испытывает постоянные возмущения $u_0(t)$ с нормой, не превышающей $\delta_0 : \sup\limits_{t \in [0,\infty)} \|u_0(t)\| \le \delta_0$.

При этих возмущениях система уравнений (15.1) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + u_0(t). \tag{15.2}$$

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (15.2). Дадим начальному приближению возмущение $x(0) \neq 0$.

Решение уравнения (15.2) представимо в виде

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}u_0(\tau)d\tau. \tag{15.3}$$

Переходя в (15.3) к нормам, имеем:

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\| + \int\limits_0^t e^{\Lambda(A)(t-\tau)}\|u_0(\tau)\|d\tau, \tag{15.4}$$

где $\Lambda(A)-$ логарифмическая норма (15.4) матрицы A.

Пусть $\varepsilon(\varepsilon > 0)-$ произвольное как угодно малое вещественное число.

Усилим неравенство (15.4):

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\| + \int\limits_0^t e^{\Lambda(A)(t-\tau)}(\|u_0(\tau)\| + \varepsilon\|x(\tau)\|)d\tau. \tag{15.5}$$

Умножим обе части неравенства (15.5) на $e^{-\Lambda(A)t}$ и введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = e^{-\Lambda(A)t}\|x(t)\|$.

Тогда неравенство (15.5) можно представить в виде

$$\varphi(t) < \|x(0)\| + \int\limits_0^t (e^{-\Lambda(A)\tau}\|u_0(t)\| + \varepsilon\varphi(\tau))d\tau. \tag{15.6}$$

Здесь нужно рассматривать в отдельности два случая: 1) $\Lambda(A) \leq 0$, 2) $\Lambda(A) > 0$.

Рассмотрение начнем с первого случая, представляющего для дальнейшего наибольший интерес. В этом случае

$$\varphi(t) < \|x(0)\| + \int\limits_0^t \left(e^{-\Lambda(A)t}\delta_0 + \varepsilon\varphi(\tau)\right)d\tau. \tag{15.7}$$

Применяя к (15.7) лемму 1.2 из первого раздела главы 1, имеем:

$$\varphi(t) < \frac{e^{-\Lambda(A)t}\delta_0}{\varepsilon}(e^{\varepsilon t} - 1) + \|x(0)\|e^{\varepsilon t}$$

и, следовательно,

$$\|x(t)\| < \frac{\delta_0}{\varepsilon}(e^{\varepsilon t}-1)+e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)t}\|x(0)\| =$$

$$= \frac{\delta_0}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon t}{1!}+\frac{(\varepsilon t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\varepsilon t)^n}{n!}+\cdots\right)+$$

$$+e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)}\|x(0)\| =$$

$$= \delta_0\left(\frac{t}{1!}+\frac{\varepsilon t^2}{2!}+\cdots+\frac{\varepsilon^{n-1}t^n}{n!}+\cdots\right)+e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)t}\|x(0)\|.$$

Так как ε произвольное, как угодно малое число, то переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, имеем:

$$\|x(t)\| \le \delta_0 t + e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\|. \tag{15.8}$$

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда $\Lambda(A) \ge 0$. В этом случае

$$\varphi(t) < \|x(0\| + \int\limits_0^t (\delta_0+\varepsilon\varphi(\tau))d\tau. \tag{15.9}$$

Применяя к (15.9) лемму 15.1, имеем:

$$\varphi(t) < \frac{\delta_0}{\varepsilon}(e^{\varepsilon t}-1)+\|x(0)\|e^{\varepsilon t}$$

и, следовательно,

$$\|x(t)\| < \frac{\delta_0 e^{\Lambda(A)t}}{\varepsilon}(e^{\varepsilon t}-1)+\|x(0)\|e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)t} =$$

$$= e^{\Lambda(A)t}\delta_0\left(\frac{t}{1!}+\frac{\varepsilon t^2}{2!}+\cdots+\frac{\varepsilon^{n-1}t^n}{n!}+\cdots\right)+$$

$$+\|x(0)\|e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)t}. \tag{15.10}$$

Переходя в неравенстве (15.10) к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, имеем:

$$\|x(t)\| \le \delta_0 t e^{\Lambda(A)t} + e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\|. \tag{15.11}$$

Из проведенного анализа следует, что решение системы уравнений (15.2) при $t \ge 0$ удовлетворяет неравенствам:

$$\|x(t)\| \le \delta_0 t + e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\| \tag{15.12}$$

при $\Lambda(A) < 0$ и

$$|x(t)\| \leq \delta_0 t e^{\Lambda(A)t} + e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\| \qquad (15.13)$$

при $\Lambda(A) \geq 0$.

Исследуем функцию $\psi(t) = \delta_0 t + e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\|$ при $t \geq 0$. Очевидно $\psi^{'}(t) = \delta_0 + \Lambda(A)e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\|$ и, следовательно, функция $\psi(t)$ при

$$\delta_0 + \Lambda(A)\|x(0)\| < 0 \qquad (15.14)$$

убывает в интервале $[0, T_*)$, где T_*- корень уравнения

$$\delta_0 + \Lambda(A)e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\| = 0.$$

Таким образом, при выполнении условия (15.14) траектория решения системы уравнений (15.2) не выходит из шара $R(0, \|x(0)\|)$ в промежутке времени $[0, T_*]$.

Так как $\delta_0 T_* + e^{\Lambda(A)T_*}\|x(0)\| \leq \|x_0\|$, то взяв $x(T_*)$ за новое начальное приближение и повторяя предыдущие рассуждения, можно показать, что при $t \in [0, 2T_*]$ траектория системы уравнений (2.2) не выходит из шара $R(0, \|x(0)\|)$.

Повторяя по индукции эти рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 15.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\|x(0)\| \neq 0$;

2) логарифмическая норма матрицы A $\Lambda(A) \leq -\alpha < 0$;

3) выполнено условие $\delta_0 - \alpha\|x(0)\| < 0$,

4) справедливо неравенство $\delta_0 T_* + e^{\Lambda(A)T_*}\|x(0)\| \leq \|x(0)\|$, где T_*- решение уравнения $\delta_0 + \Lambda(A)e^{\Lambda(A)t}\|x(0)\| = 0$.

Тогда траектория решения уравнения (15.2) при $t \in [0, \infty)$ не покидает шара $R(0, \|x(0)\|)$.

Пусть первое условие предыдущей теоремы не выполняется. Тогда справедливо следующее обобщение теоремы 15.1.

Теорема 15.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) логарифмическая норма матрицы A $\Lambda(A) \leq -\alpha < 0$;

2) r_0- наименьшее положительное число, при котором выполняется неравенство $\delta_0 - \alpha r_0 < -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0-$ достаточно малое число;

3) справедливо неравенство $\delta_0 T_* + e^{\Lambda(A)T_*}r_0 \leq r_0$, где T_*- решение уравнения $\delta_0 + \Lambda(A)e^{\Lambda(A)t}r_0 = r_0$.

Тогда траектория решения уравнения (15.2) при $t \in [0, \infty)$ не покидает шара $R(0, r_0)$.

Доказательство. Рассмотрим траекторию решения системы уравнений (15.2) при начальном значении $x(0) = 0$.

Возможны два случая:

1) траектория не покидает шара $R(0, r_0)$;

2) в момент времени $t = T^*$ траектория покидает шар $R(0, r_0)$, проходя через точку x^*.

В первом случае траектория решения системы (15.2) при тривиальном начальном значении не покидает шара $R(0, r_0)$.

Во втором случае можно взять точку x^* в качестве начальной и повторить рассуждения , сделанные при доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема доказана.

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Введение

Исследованию устойчивости решений различных классов уравнений в частных производных посвящена обширная литература, подробная библиография которой приведена в монографиях [33], [98], [107]. Основным аппаратом исследования нелинейных уравнений в частных производных является применение преобразования Фурье и построение обобщенных функционалов Ляпунова.

Во второй главе был предложен метод построения критериев устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на исследовании спектров специальным образом построенных семейств линейных операторов.

В данной главе этот метод распространяется на исследование устойчивости решения задачи Коши для некоторых классов уравнений в частных производных.

Отметим, что предлагаемые ниже критерии устойчивости могут быть распространены и на некоторые другие системы дифференциальных уравнений с распределенными параметрами. В частности, из результатов, приведенных в данной главе, и результатов, изложенных в разделе 12 предыдущей главы, следует метод исследования устойчивости решений линейных и нелинейных систем гиперболических уравнений.

На протяжении этой главы рассматриваются системы линейных и нелинейных параболических уравнений, имеющие при любых начальных значениях из рассматриваемой области решения, определенные при всех значениях $t \in [t_0, \infty)$. Для исследования устойчивости этих систем предлагается два различных метода.

Определение устойчивости решений систем с распределенными параметрами приведено в главе 1.

2. Задача Коши для линейных параболических уравнений

Изложим метод исследования устойчивости решений уравнений в частных производных параболического типа на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{11}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{12}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &\quad + a_{13}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{14}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &\quad + a_{15}(t)u_1(t,x_1,x_2) + a_{16}(t)u_2(t,x_1,x_2), \\ &\frac{\partial u_2(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{21}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{22}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &\quad + a_{23}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{24}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &\quad + a_{25}(t)u_1(t,x_1,x_2) + a_{26}(t)u_2(t,x_1,x_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим через $u(t,x)$ вектор $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$, $x = (x_1, x_2)$.

Введем начальные условия

$$u(t_0, x) = u_0(x) \tag{2.2}$$

и будем исследовать задачу Коши (2.1) − (2.2).

На протяжении всего этого раздела предполагается, что решение $u(t,x)$ задачи Коши (2.1) − (2.2) и производная $\partial u(t,x)/\partial t$ суммируемы с квадратом по пространственным переменным.

Исследование устойчивости решения задачи Коши (2.1) − (2.2) будем проводить в банаховом пространстве X вектор-функций $g = (g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2))$ с нормой

$$\|g\| = \max_{i=1,2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_i(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2\right]^{1/2}.$$

При каждом фиксированном значении t норма вектор-функции $u(t,x)$ определяется формулой

$$\|u(t,x)\| = \max_{i=1,2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u_i(t,x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2\right]^{1/2}.$$

Пусть $-\infty < \omega_i < \infty, i = 1, 2$. Введем матрицу

$$A(T, \omega_1, \omega_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} -a_{11}(T)\omega_1^2 - a_{12}(T)\omega_2^2 + a_{15}(T) & -a_{13}(T)\omega_1^2 - a_{14}(T)\omega_2^2 + a_{16}(T) \\ -a_{21}(T)\omega_1^2 - a_{22}(T)\omega_2^2 + a_{25}(T) & -a_{23}(T)\omega_1^2 - a_{24}(T)\omega_2^2 + a_{26}(T) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия: 1) функции $a_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 6$, непрерывны при $t \geq t_0$; 2) при любых $t \geq t_0$, $\omega_i(-\infty < \omega_i < < \infty)$, $i = 1, 2$, логарифмическая норма матрицы $A(t, \omega_1, \omega_2)$ отрицательна ($\Lambda A(t, \omega_1, \omega_2) < 0$). Тогда тривиальное решение задачи Коши устойчиво.

Доказательство. Пусть $u_0(x)$− начальное возмущение ($u_0(x)$− суммируемая с квадратом в $(-\infty, \infty)^2$ непрерывная функция) и $\|u_0(x)\| \leq \epsilon$.

Применим к системе уравнений (2.1) преобразование Фурье по пространственным переменным. Прямое и обратное преобразования Фурье вычисляются по формулам

$$U(t, \omega_1, \omega_2) = Fu(t, x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t, x_1, x_2) \exp\{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\} dx_1 dx_2,$$

$$u(t, x_1, x_2) = F^{-1}U(t, \omega_1, \omega_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t, \omega_1, \omega_2) \exp\{\mathrm{i}(\omega_1 \mathrm{x}_1 + \omega_2 \mathrm{x}_2)\} \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\omega_2.$$

В результате получаем

$$\frac{\partial U_1(t, \omega)}{\partial t} = -a_{11}(t)\omega_1^2 U_1(t, \omega) - a_{12}(t)\omega_2^2 U_1(t, \omega) -$$
$$-a_{13}(t)\omega_1^2 U_2(t, \omega) - a_{14}(t)\omega_2^2 U_2(t, \omega) +$$
$$+a_{15}(t) U_1(t, \omega) + a_{16}(t) U_2(t, \omega),$$
$$\frac{\partial U_2(t, \omega)}{\partial t} = -a_{21}(t)\omega_1^2 U_1(t, \omega) - a_{22}(t)\omega_2^2 U_1(t, \omega) -$$
$$-a_{23}(t)\omega_1^2 U_2(t, \omega) - a_{24}(t)\omega_2^2 U_2(t, \omega) +$$
$$+a_{25}(t) U_1(t, \omega) + a_{26}(t) U_2(t, \omega). \qquad (2.3)$$

Зафиксируем произвольные значения ω_1, ω_2 и исследуем устойчивость решения системы уравнений (2.3) при начальных условиях

$$U(t_0, \omega) = U_0(\omega), \tag{2.4}$$

где $U_0(\omega)$— преобразование Фурье начальных условий $u_0(x)$.

Для исследования устойчивости системы уравнений (2.3) в векторном пространстве Фурье-образов над полем комплексных чисел при произвольно фиксированных значениях $\omega_1, \omega_2((\omega_1, \omega_2) \in R_2)$ введем норму $\|U(t, \omega_1, \omega_2)\|_1 = \max_i |U_i(t, \omega_1, \omega_2)|$ и для простоты обозначений вместо $\|U(t, \omega_1, \omega_2)\|_1$ будем писать $\|U(t)\|_1$.

Пусть $\Omega(\omega_1, \omega_2)$– гладкая неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Omega(\omega_1, \omega_2)| d\omega_1 d\omega_2 \leq \beta < \infty;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Omega(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \leq \epsilon_0^2 = 4\epsilon^2, \ \|U_0(\omega)\|_1 \leq \Omega(\omega).$$

Вначале докажем устойчивость задачи Коши (2.3) – (2.4) при произвольно фиксированных значениях ω_1, ω_2 $((\omega_1, \omega_2) \in R_2)$. Пусть логарифмическая норма матрицы $A(T, \omega)$ при фиксированном значении ω не превосходит $-\alpha$, $\alpha > 0$. При выполнении этого условия покажем, что при любом $(t_0 \leq T \leq t < \infty)$ справедливо неравенство $\|U(t, \omega)\|_1 \leq$ $\leq \|U(T, \omega)\|_1$.

Представим уравнение (2.3) в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U_1(t,\omega)}{\partial t} = -a_{11}(T)\omega_1^2 U_1(t,\omega) - a_{12}(T)\omega_2^2 U_1(t,\omega) - \\
-a_{13}(T)\omega_1^2 U_2(t,\omega) - a_{14}(T)\omega_2^2 U_2(t,\omega) + \\
+a_{15}(T)U_1(t,\omega) + a_{16}(T)U_2(t,\omega) - \\
-(a_{11}(t) - a_{11}(T))\omega_1^2 U_1(t,\omega) - \ldots - (a_{14}(t) - a_{14}(T))\omega_2^2 U_2(t,\omega) + \\
+(a_{15}(t) - a_{15}(T))U_1(t,\omega) + (a_{16}(t) - a_{16}(T))U_2(t,\omega), \\
\frac{\partial U_2(t,\omega)}{\partial t} = -a_{21}(T)\omega_1^2 U_1(t,\omega) - a_{22}(T)\omega_2^2 U_1(t,\omega) - \\
-a_{23}(T)\omega_1^2 U_2(t,\omega) - a_{24}(T)\omega_2^2 U_2(t,\omega) + \\
+a_{25}(T)U_1(t,\omega) + a_{26}(T)U_2(t,\omega) - \\
-(a_{21}(t) - a_{21}(T))\omega_1^2 U_1(t,\omega) - \ldots - (a_{24}(t) - a_{24}(T))\omega_2^2 U_2(t,\omega) + \\
+(a_{25}(t) - a_{25}(T))U_1(t,\omega) + (a_{26}(t) - a_{25}(T))U_2(t,\omega).
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.5) при $t \geq T$ можно представить в виде

$$U(t,\omega) = e^{A(T,\omega)(t-T)}U(T,\omega) + \int\limits_T^t e^{A(T,\omega)(t-s)}F(s,U)ds, \qquad (2.6)$$

где

$$F(t,U(\omega)) = (f_1(t,U(\omega)), f_2(t,U(\omega))),$$

$$f_i(t,U(\omega)) = -(a_{i1}(t)-a_{i1}(T))\omega_1^2 U_1(t,\omega) - \ldots - (a_{i4}(t)-a_{i4}(T))\omega_2^2 U_2(t,\omega) +$$
$$+(a_{i5}(t)-a_{i5}(T))U_1(t,\omega) + (a_{i6}(t)-a_{i6}(T))U_2(t,\omega),$$

$i = 1,2.$

Из структуры оператора $F(t,U(\omega))$ следует, что для любого как угодно малого $\epsilon, \epsilon > 0$, найдется такой промежуток времени $\Delta T_1(\omega)$, что

$$\|F(t,U(\omega))\|_1 \leq \epsilon \|U(\omega)\|_1. \qquad (2.7)$$

Переходя в (2.6) к нормам и используя неравенство Гроноулла – Беллмана, имеем при $T \leq t \leq T + \Delta T_1(\omega)$:

$$\|U(t,\omega)\|_1 \leq e^{(-\alpha+\epsilon)(t-T)}\|U(T,\omega)\|_1 \leq e^{-\alpha(t-T)/2}\|U(T,\omega)\|_1 \leq$$
$$\leq \|U(T,\omega)\|_1. \qquad (2.8)$$

Из предыдущих рассуждений следует, что неравенство (2.8) не зависит от ω.

Таким образом, имеем

$$\max_{i=1,2} |U_i(t,\omega)|^2 \leq \max_{i=1,2} |U_{0i}(\omega)|^2 .$$

Отсюда следует, что

$$|U_i(t,\omega)|^2 \leq (|U_{01}(\omega)|^2 + |U_{02}(\omega)|^2) \leq 2\Omega^2(\omega).$$

Интегрируя предыдущее неравенство, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |U_i(t,\omega_1,\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \leq \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |U_{0i}(\omega_1,\omega_2)|^2 d\omega_1, d\omega_2 \leq$$
$$\leq 2\epsilon_0^2.$$

Воспользовавшись формулой Планшереля $\|U(t,\omega)\|_2 = \|u(t,x)\|_2$, убеждаемся в справедливости неравенства:

$$\|u(t,x)\|_2 \leq 2\epsilon_0.$$

Устойчивость тривиального решения системы уравнений (2.1) доказана. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия: 1) функции $a_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 6$, равномерно непрерывны при $t_0 \leq t \leq \infty$;
2) при любых $t \geq t_0$, ω_i $(-\infty < \omega_i < \infty)$, $i = 1, 2$, логарифмическая норма матрицы $A(t, \omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(A(t, \omega_1, \omega_2)) < -\alpha, \alpha > 0.$$

Тогда тривиальное решение задачи Коши (2.1), (2.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Устойчивость тривиального решения задачи Коши (2.1) – (2.2) доказана в предыдущей теореме. Повторяя проведенные при ее доказательстве выкладки, приходим к неравенству (2.8). Так как функции a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 6$, равномерно непрерывны, для каждого фиксированного значения (ω_1, ω_2) найдется такое значение $\Delta T(\omega_1, \omega_2)$, что при любых $t_0 \leq T < \infty$ в сегменте $T \leq t \leq T + \Delta T(\omega_1, \omega_2)$ справедливо неравенство

$$\|F(t, U(t, \omega))\|_1 \leq \alpha \|U(t, \omega)\|_1 / 4.$$

Тогда из неравенств (2.6)—(2.8) при $T \leq t \leq T + \Delta T$ имеем

$$\|U(t, \omega)\|_1 \leq e^{-(3\alpha/4)(t-T)} \|U(T, \omega)\|_1.$$

Так как ΔT не зависит от t и T, то при $T + k\Delta T \leq t \leq T + (k+1)\Delta T$ справедливо неравенство

$$\|U(t, \omega)\|_1 \leq e^{-(3\alpha/4)(t-(T+k\Delta T))} \|U(T + k\Delta T, \omega)\|_1 \leq e^{-(3\alpha/4)k\Delta T} \|U(T, \omega)\|_1.$$

Таким образом, при $t \to \infty$ $\|U(t, \omega)\|_1 \to 0$.

Известно следующее утверждение [84].

Теорема Лебега. Пусть на множестве E задана последовательность измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, которые сходятся по мере к функции $F(x)$. Если существует такая суммируемая функция $\Phi(x)$, что при всех n и x

$$|f_n(x)| \leq \Phi(x),$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x) dx = \int\limits_E F(x) dx.$$

Так как при каждом фиксированном ω функции $|U_i(t,\omega)|$, $i = 1,2$, стремятся к нулю и ограничены суммируемой функцией $|U_i(T,\omega)|$, $i = 1,2$, по теореме Лебега

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U_i(t,\omega)|^2 d\omega_1 d\omega_2 = 0.$$

Повторяя выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 2.1, завершаем доказательство.

Теорема 2.2 допускает следующее усиление.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия: 1) функции $a_{ij}(t)$, $i = 1,2$, $j = 1,2,\ldots,6$, непрерывны при $t_0 \le t < \infty$, 2) при любых $t \ge t_0$, ω_i $(-\infty < \omega_i < \infty)$, $i = 1,2$, логарифмическая норма матрицы $A(t,\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет неравенству $\Lambda(A(t,\omega_1,\omega_2)) < 0$ $(\Lambda(A(t,\omega_1,\omega_2) < -\alpha, \alpha > 0)$. Тогда тривиальное решение задачи Коши (2.1) $-$ (2.2) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Устойчивость тривиального решения задачи Коши (2.1) $-$ (2.2) доказана в теореме 2.1. Повторяя проведенные при ее доказательстве выкладки, приходим к неравенству (2.8). Полагая $T_1 = T + \Delta T_1(\omega)$ и повторяя рассуждения, приведшие к неравенству (2.8), получаем последовательность $T, T_1, T_2, \ldots$, для которой справедливы неравенства $\|U(t,\omega)\|_1 \le e^{-\alpha(t-T_k)/2}\|U(T_k,\omega)\|_1$, $t \in [T_k, T_{k+1}]$, $k = 1,2,\ldots$.

Пусть T^*- наименьшее значение, при котором указанные неравенства нарушаются, т. е. при $t > T^*$ $\|U(t,\omega)\|_1 > \|U(T^*,\omega)\|_1 e^{-\alpha(t-T^*)/2}$. Взяв T^* за начальное приближение и повторяя рассуждения, приведшие к неравенству (2.8), убеждаемся, что существует интервал времени $[T^*, T^*+\Delta T^*]$, в течение которого выполняется неравенство $\|U(t,\omega)\|_1 \le \|U(T^*,\omega)\|_1 e^{-\alpha(t-T^*)/2}$. Таким образом, при всех t $(t > t_0)$ справедливо неравенство $\|U(t,\omega)\|_1 \le e^{-\alpha(t-t_0)/2}\|U(t_0,\omega)\|_1$, из которого следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|U(t,\omega)\|_1 = 0$.

Случай, когда $\|U(t,\omega)\|_1 = 0$ при некотором значении t, тривиален. Доказательство теоремы завершается по аналогии с доказательством теорем 2.1 и 2.2.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия:

1) функции $a_{ij}(t), i = 1,2, j = 1,\ldots,6$, непрерывны при $t \ge t_0$;

2) при любых $t \geq t_0$, $\omega_i(-\infty < \omega_i < \infty)$, $i = 1, 2$, интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Lambda A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau$$

неположителен и

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t} \Lambda(A(\tau, \omega_1, \omega_2)) d\tau = -\infty.$$

Тогда тривиальное решение задачи Коши (2.1) – (2.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для доказательства асимптотической устойчивости заметим, что решение задачи Коши (2.3) – (2.4) удовлетворяет неравенству

$$\|U(t, \omega)\|_1 \leq \exp\{\int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau)\} \|U_0\|_1.$$

Из условия 2) теоремы следует, что при любых ω_1, ω_2 $(-\infty < w_i < < \infty, \quad i = 1, 2)$ $\|U(t, \omega)\|_1$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Повторяя рассуждения, сделанные при доказательстве предыдущей теоремы, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия:
1) функции $a_{ij}(t)$, $\quad i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, 6$, непрерывны при $t \geq t_0$;
2) при любых $t \geq t_0$, ω_i $(-\infty < \omega_i < \infty)$, $i = 1, 2$, выполнено условие Лаппо-Данилевского о перестановочности матрицы $A(t, \omega_1, \omega_2)$ со своим интегралом, т. е.

$$A(t, \omega_1, \omega_2) \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau A(t, \omega_1, \omega_2);$$

3) при любых $t \geq t_0$, $\omega \in R_2$ логарифмическая норма $\Lambda(\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau)$ оператора $\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau$ неположительна и

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau, \omega_1, \omega_2) d\tau) = -\infty.$$

Тогда тривиальное решение задачи Коши (2.1)—(2.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Доказательство подобно доказательствам теорем 2.1 и 2.2. Отличие заключается в том, что при выполнении условия Лаппо-Данилевского решение задачи Коши (2.3)—(2.4) имеет вид

$$U(t,\omega) = \exp\{\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau,\omega_1,\omega_2)d\tau\}U_0.$$

Отсюда

$$\|U(t,\omega)\|_1 \leq \exp\{\Lambda(\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau,\omega_1,\omega_2)d\tau\}\|U_0\|_1.$$

Дальнейшая часть доказательства не отличается от доказательства теоремы 2.1.

3. Устойчивость решений систем нелинейных уравнений в частных производных параболического типа

Для простоты обозначений остановимся на системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{11}(t)\dfrac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{12}(t)\dfrac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ \qquad + a_{13}(t)\dfrac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{14}(t)\dfrac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ \qquad + a_{15}(t)u_1(t,x_1,x_2) + a_{16}(t)u_2(t,x_1,x_2) + g_1(t,u), \\ \dfrac{\partial u_2(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{21}(t)\dfrac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{22}(t)\dfrac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ \qquad + a_{23}(t)\dfrac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{24}(t)\dfrac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + \\ \qquad + a_{25}(t)u_1(t,x_1,x_2) + a_{26}(t)u_2(t,x_1,x_2) + g_2(t,u) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$u(t_0;x_1,x_2) = u_0(x_1,x_2). \tag{3.2}$$

Введем матрицу $C(t,\omega_1,\omega_2) =$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} -a_{11}(t)\omega_1^2 - a_{12}(t)\omega_2^2 + a_{15}(t) & -a_{13}(t)\omega_1^2 - a_{14}(t)\omega_2^2 + a_{16}(t) \\ -a_{21}(t)\omega_1^2 - a_{22}(t)\omega_2^2 + a_{25}(t) & -a_{23}(t)\omega_1^2 - a_{24}(t)\omega_2^2 + a_{26}(t) \end{array} \right\},$$

где $-\infty < \omega_i < \infty, i = 1,2$.

Пусть $G(s,u) = (g_1(s,u), g_2(s,u))$ и

$$\|G(t,u)\| \leq \beta\|u\|. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия:

1) при любых фиксированных значениях $(t, \omega_1, \omega_2), t \geq t_0, -\infty < < \omega_i < \infty, i = 1, 2$, логарифмическая норма матрицы $C(t, \omega_1, \omega_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(C(t, \omega_1, \omega_2)) < -\alpha(\omega_1, \omega_2), \quad \alpha(\omega_1, \omega_2) > 0;$$

2) функции $a_{ij}(t)(i = 1, 2, j = 1, \dots, 6)$ непрерывны по переменной t;

3) функции $g_i(t, u), i = 1, 2$, непрерывны по всем переменным;

4) справедливо неравенство (3.3) и $\beta < \alpha(\omega_1, \omega_2)$ при всех $(\omega_1, \omega_2) \in \in R_2$.

Тогда тривиальное решение системы уравнений (3.1) устойчиво.

Доказательство. Введем норму $\|u(t, x)\|$ равенством

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1,2} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_i(t, x)|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2}.$$

Пусть $u_0(x)-$ начальное возмущение и $\|u_0(x)\| \leq \epsilon$. На протяжении этого раздела считаем $u_0(x)$ непрерывной функцией.

Применим к системе уравнений (3.1) преобразование Фурье по пространственным переменным. В результате получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1(t, \omega)}{\partial t} = -a_{11}(t)\omega_1^2 U_1(t, \omega) - a_{12}(t)\omega_2^2 U_1(t, \omega) - \\ \quad -a_{13}(t)\omega_1^2 U_2(t, \omega) - a_{14}(t)\omega_2^2 U_2(t, \omega) + \\ \quad +a_{15}(t)U_1(t, \omega) + a_{16}(t)U_2(t, \omega) + \\ \quad +F(g_1(t, u)), \\ \dfrac{\partial U_2(t, \omega)}{\partial t} = -a_{21}(t)\omega_1^2 U_1(t, \omega) - a_{22}(t)\omega_2^2 U_1(t, \omega) - \\ \quad -a_{23}(t)\omega_1^2 U_2(t, \omega) - a_{24}(t)\omega_2^2 U_2(t, \omega) + \\ \quad +a_{25}(t)U_1(t, \omega) + a_{26}(t)U_2(t, \omega) + F(g_2(t, u)) \end{cases} \tag{3.4}$$

с начальными условиями

$$U(t_0; \omega_1, \omega_2) = U_0(\omega_1, \omega_2). \tag{3.5}$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Исследуем задачу Коши (3.4)—(3.5). Покажем, что при любых t $(t_0 \leq \leq t \leq T < \infty)$ справедливо неравенство

$$\|U(t, \omega)\| \leq \|U(T, \omega)\|.$$

Представим уравнение (3.4) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1(t,\omega)}{\partial t} = -a_{11}(T)\omega_1^2 U_1(t,\omega) - a_{12}(T)\omega_2^2 U_1(t,\omega)- \\ -a_{13}(T)\omega_1^2 U_2(t,\omega) - a_{14}(T)\omega_2^2 U_2(t,\omega)+ \\ +a_{15}(T)U_1(t,\omega) + a_{16}(T)U_2(t,\omega)- \\ -(a_{11}(t) - a_{11}(T))\omega_1^2 U_1(t,\omega) - \ldots - (a_{14}(t) - a_{14}(T))\omega_2^2 U_2(t,\omega)+ \\ +(a_{15}(t) - a_{15}(T))U_1(t,\omega) + (a_{16}(t) - a_{16}(T))U_2(t,\omega)+ \\ +F(g_1(t,u)); \\ \dfrac{\partial U_2(t,\omega)}{\partial t} = -a_{21}(T)\omega_1^2 U_1(t,\omega) - a_{22}(T)\omega_2^2 U_1(t,\omega)- \\ -a_{23}(T)\omega_1^2 U_2(t,\omega) - a_{24}(T)\omega_2^2 U_2(t,\omega)+ \\ +a_{25}(T)U_1(t,\omega) + a_{26}(T)U_2(t,\omega)- \\ -(a_{21}(t) - a_{21}(T))\omega_1^2 U_1(t,\omega) - \ldots - (a_{24}(t) - a_{24}(T))\omega_2^2 U_2(t,\omega)+ \\ +(a_{25}(t) - a_{25}(T))U_1(t,\omega)) + (a_{26}(t) - a_{26}(T))U_2(t,\omega)+ \\ +F(g_2(t,u)). \end{cases} \tag{3.6}$$

В операторной форме система уравнений (3.6) имеет вид

$$\frac{\partial U(t,\omega_1,\omega_2)}{\partial t} = C(T,\omega_1,\omega_2)U(t,\omega_1,\omega_2) + F(G(t,u)). \tag{3.7}$$

При каждом фиксированном значении (ω_1,ω_2) решение задачи Коши (3.4)—(3.5) при $t \geq T$ может быть представлено в виде

$$U(t,\omega_1,\omega_2) = e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-t_0)}U(T,\omega_1,\omega_2)+$$

$$+\int\limits_T^t e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-s)}F(G(s,u))ds. \tag{3.8}$$

Так как по условиям теоремы логарифмическая норма $\Lambda(C(t,\omega_1,\omega_2))$ оператора $C(t,\omega_1,\omega_2)$ удовлетворяет при всех $(\omega_1,\omega_2) \in R_2$ неравенству

$$\Lambda(C(t,\omega_1,\omega_2)) \leq \sup_t \Lambda(C(t,\omega_1,\omega_2)) \leq -\alpha(\omega_1,\omega_2),\ \alpha(\omega_1,\omega_2) > 0,$$

то переходя в (3.8) к нормам, имеем:

$$\|U(t,\omega_1,\omega_2)\| \leq \|e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-T_0)}U(T,\omega_1,\omega_2)\|+$$

$$+\|\int\limits_T^t e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-s)}F(G(t,u))ds\|. \tag{3.9}$$

Оценим норму каждого слагаемого в отдельности. Очевидно,

$$\|e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-T)}U(T,\omega_1,\omega_2)\| \le e^{-\alpha(\omega_1,\omega_2)(t-T)}\|U(T,\omega_1,\omega_2)\|; \tag{3.10}$$

$$\|\int\limits_T^t e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-s)}F(G(s,u))ds\| \le$$

$$\le \int\limits_T^t \|e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-s)}F(G(s,u))ds\| \le$$

$$\le \int\limits_T^t \|e^{C(T,\omega_1,\omega_2)(t-s)}\|\|F(G(s,u))ds\| \le$$

$$\le \int\limits_T^t e^{-\alpha(\omega_1,\omega_2)(t-s)}\|G(s,u)\|ds \le \beta\int\limits_T^t e^{-\alpha(\omega_1,\omega_2)(t-s)}\|u\|ds \le$$

$$\le \beta\int\limits_T^t e^{-\alpha(\omega_1,\omega_2)(t-s)}\|U\|ds. \tag{3.11}$$

Из неравенств (3.9)—(3.11) имеем

$$\|U(t,\omega)\| \le e^{-\alpha(\omega_1,\omega_2)(t-t_0)}\|U(T,\omega)\| +$$

$$+\beta\int\limits_T^t e^{-\alpha(\omega_1,\omega_2)(t-s)}\|U(s,\omega)\|ds. \tag{3.12}$$

Применяя неравенство Гронуолла—Беллмана, получаем:

$$\|U(t,\omega)\| \le e^{-(\alpha(\omega_1,\omega_2)-\beta)(t-T)}\|U(T,\omega)\|. \tag{3.13}$$

Доказательство теоремы завершается так же, как в линейном случае (см. теорему 2.1).

Теорема доказана.

Замечание. Асимптотическая устойчивость систем нелинейных уравнений в частных производных исследуется распространением утверждений теорем 2.2—2.4 на нелинейный случай.

4. Устойчивость решений систем линейных параболических уравнений в ограниченных областях

В предыдущих разделах исследовалась устойчивость решений систем линейных и нелинейных параболических систем, определенных во всем пространстве R_n, $n = 2, 3, \dots$. Намного больший интерес представляет построение критериев устойчивости решений уравнений в частных производных в ограниченных областях, так как именно к таким уравнениям сводится большинство физических и механических задач.

В данном разделе предлагается метод исследования устойчивости решений линейных параболических уравнений, определенных в ограниченных областях.

Как и в разделе 2, изложим метод на примере системы уравнений второго порядка.

Рассмотрим в области Ω с кусочно - гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = a_{11}(t,x)\Delta u_1(t,x) + a_{12}(t,x)\Delta u_2(t,x)+ \\
+a_{13}(t,x)u_1(t,x) + a_{14}(t,x)u_2(t,x); \\
\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = a_{21}(t,x)\Delta u_1(t,x) + a_{22}(t,x)\Delta u_2(t,x)+ \\
+a_{23}(t,x)u_1(t,x) + a_{24}(t,x)u_2(t,x).
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Обозначим через $u(t,x)$ вектор $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$, $x = (x_1, x_2)$.

Введем начальное

$$u(t_0, x) = u_0(x) \tag{4.2}$$

и граничное

$$u(t, \Gamma) = u_1(x)|_{x\in\Gamma} \tag{4.3}$$

условия.

Пусть $u^*(t,x)$ является решением задачи (4.1)–(4.3), определенным в области Ω при $t \geq t_0$.

Будем считать, что функция $u^*(t,x)$ имеет частные производные первого порядка по переменной t и второго порядка по переменным x_1, x_2, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$.

Дадим начальному условию возмущение и исследуем поведение решения уравнения (4.1) при начальном условии

$$u(t_0, x) = u_0(x) + \delta_0(x) \tag{4.4}$$

и при граничном условии

$$u(t, \Gamma) = u_1(x)|_{x \in \Gamma}. \tag{4.5}$$

Решение уравнения (4.1) при условиях (4.4) и (4.5) обозначим через $u^{**}(t, x)$.

Введем новую неизвестную функцию

$$y(t, x) = u^{**}(t, x) - u^*(x). \tag{4.6}$$

Подставляя функцию $u^{**}(t, x)$, выраженную формулой (4.6) в уравнение (4.1), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial y_1(t,x)}{\partial t} = a_{11}(t,x)\Delta y_1(t,x) + a_{12}(t,x)\Delta y_2(t,x) +$$

$$+ a_{13}(t,x) y_1(t,x) + a_{14}(t,x) y_2(t,x),$$

$$\frac{\partial y_2(t,x)}{\partial t} = a_{21}(t,x)\Delta y_1(t,x) + a_{22}(t,x)\Delta y_2(t,x) +$$

$$+ a_{24}(t,x) y_1(t,x) + a_{24}(t,x) y_2(t,x) \tag{4.7}$$

при нулевом граничном условии и начальном условии

$$y(t_0, x) = \delta_0(x). \tag{4.8}$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) уравнение (4.7) при нулевых граничных условиях и начальном условии (4.8) с функцией $\delta_0(x)$, имеющей непрерывные производные до второго порядка, имеет решение $y^*(t, x)$ с непрерывной производной по первой переменной и частными производными второго порядка по второй переменной, удовлетворяющими условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \le 1$;

2) при любых t, $(t_0 \le t < \infty)$ и $x \in \Omega$

$$a_{11}(t,x) \ge 0; \quad a_{12}(t,x) \ge 0;$$

$$a_{21}(t,x) \ge 0; \quad a_{22}(t,x) \ge 0,$$

и логарифмическая норма матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{13}(t,x) & a_{14}(t,x) \\ a_{23}(t,x) & a_{24}(t,x) \end{pmatrix}$$

отрицательна.

Тогда тривиальное решение уравнения (4.7) устойчиво.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что решение $y^*(t,x)$ при начальном условии $y^*(t_0,x) = \delta_0(x)$, $\|\delta_0(x)\| = \delta_0$, в момент времени T покидает шар $R(0,\delta), \delta = 2\delta_0$, причем $y^*(T,x^*) \in S(0,2\delta)$.

Для простоты дальнейших обозначений положим $\Omega = [0,1]^2$ и введем в Ω сетку узлов таким образом, чтобы точка x^* принадлежала этой сетке. Для упрощения обозначений положим, что точка x^* принадлежит узлам v_{kl}, $k,l = 1,2,\ldots,N-1$, сетки $v_{kl} = (v_k, v_l)$. $k,l = 0,1,\ldots,N$, где $v_k = 0,1,\ldots,N$. Величина N, определяющая шаг сетки $h = 1/N$, будет введена ниже.

Представим систему уравнений (4.7) на сетке $v_{kl} = v(v_k, v_l)$, $k,l = = 0,1,\ldots,N$, следующим образом:

$$\frac{\partial y_1(t,v_k,v_l)}{\partial t} = a_{11}(t,v_{kl})\Delta_{kl}y_1(t,x) + a_{12}(t,v_{kl})\Delta_{kl}y_2(t,x) +$$

$$+a_{13}(t,v_{kl})y_1(t,v_{kl}) + a_{14}(t,v_{kl})y_2(t,v_{kl}) + \omega_1(t,v_{kl}),$$

$$\frac{\partial y_2(t,v_k,v_l)}{\partial t} = a_{21}(t,v_{kl})\Delta_{kl}y_1(t,x) + a_{22}(t,v_{kl})\Delta_{kl}y_2(t,x) +$$

$$+a_{23}(t,v_{kl})y_1(t,v_{kl}) + a_{24}(t,v_{kl})y_2(t,v_{kl}) + \omega_2(t,v_{kl}), \qquad (4.9)$$

где $\Delta_{kl}y(t,x)-$ разностный оператор

$$\Delta_{kl}y(t,x) = \frac{1}{h^2}[y(t,v_{k-1,l}) + y(t,v_{k+1,l}) + y(t,v_{k,l-1}) + y(t,v_{k,l+1}) - 4y(t,v_{kl})],$$

$h = 1/N$, $\omega_i(t,x)-$ погрешность аппроксимации системы уравнений (4.7) разностной схемой в узлах v_{kl}, $k,l = 1,2,\ldots,N-1$.

Выше на решение уравнения (4.1) при условиях (4.2) и (4.3) было наложено следующее условие: первая производная по t и вторые производные по x_1 и x_2 удовлетворяют условию Гельдера $H_\alpha(M)$ с показателем α и константой M при любых t ($t \in [t_0,T]$) и $x \in \Omega$, где $T-$ произвольное число.

Замечание. Для справедливости наших дальнейших выкладок достаточно считать эти производные равномерно непрерывными при $t \in [t_0, T]$, $x \in \Omega$, где $T-$ произвольное достаточно большое число.

При этих условиях очевидно

$$\max_{t\in[t_0,T],x\in\Omega} |\omega_i(t,x)| \le Ch^{\alpha},$$

где $C-$ постоянная, не зависящая от T и x.

Систему (4.9) можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений $2(N-1)^2$ порядка. Обозначим новые переменные через $z_i(t)$, положив $z_i(t) = y_1(t, v_{kl})$, $i = (k-1)(N-1)+l$, $k = 1,2,\ldots,N-1$, $l = 1,2,\ldots,N-1$; $z_{(N-1)^2+i}(t) = y_2(t, v_{kl})$, $i = (k-1)(N-1)+l$, $k = 1,2,\ldots,N-1$, $l = 1,2,\ldots,N-1$.

В результате система уравнений (4.9) представима в виде

$$\frac{dZ}{dt} = B(t)Z(t) + F(t), \tag{4.10}$$

где $Z(t) = (z_1(t),\ldots,z_{2(N-1)^2}(t))$, $F(t) = (\omega_1(t,v_{11}),\ldots,\omega_2(t,v_{N-1,N-1}))$, $B(t) = \{b_{ij}(t,v_{ij})\}$, $i,j = 1,2,\ldots,2(N-1)^2$.

Матрица $B(t)$ является десятидиагональной матрицей, элементы которой вне этих диагоналей равны нулю.

Для наглядности запишем в явном виде несколько уравнений из системы (4.10). Очевидно,

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = a_{11}(t,v_{11})\frac{(z_2(t)+z_N(t)-4z_1(t))}{h^2}+$$
$$+a_{12}(t,v_{11})\frac{(z_{(N-1)^2+2}(t)+z_{(N-1)^2+N}(t)-4z_{(N-1)^2+1}(t))}{h^2}+$$
$$+a_{13}(t,v_{11})z_1(t)+a_{14}(t,v_{11})z_{(N-1)^2+1}(t);$$
$$\frac{dz_i(t)}{dt} = a_{1i}(t,v_{11})\frac{(z_{i-1}(t)+z_{i+1}(t)+z_{i+N-1}-4z_i(t))}{h^2}+a_{1i}(t,v_{1i})\times$$
$$\times\left[\frac{(z_{(N-1)^2+i-1}(t)+z_{(N-1)^2+i+1}(t)+z_{(N-1)^2+N-1+i}(t))+z_{(N-1)^2-(N-1)+i}(t)}{h^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{4z_{(N-1)^2+i}(t))}{h^2}\right]+a_{13}(t,v_{1i})z_i(t)+a_{14}(t,v_{1i})z_{(N-1)^2+i}(t),$$

$i = 2,3,\ldots,N-2$.

Аналогичным образом записываются и остальные уравнения системы. Различие между уравнениями заключается в том, что в случае, когда в разностном выражении используются граничные условия, одно или два из слагаемых в правой части уравнения равно нулю.

Таким образом, задача исследования поведения решения системы уравнений (4.7) на сетке (v_k, v_l), $k, l = 1, 2, \ldots, N-1$, свелась к исследованию устойчивости решения системы уравнений (4.10), в которой вектор $F(t)$ является вектором погрешности.

Исследуем устойчивость решения системы уравнений (4.10) в пространстве R_n, $n = 2(N-1)^2$, векторов $Z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$, с нормой $\|z(t)\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |z_k(t)|$.

Будем считать, что при любом шаге $h = \frac{1}{N}$ сетки v_{kl}, $k, l = 0, 1, \ldots, N$, логарифмическая норма матрицы $B(T)$ при $t_0 \le T < \infty$ отрицательна и меньше $-\alpha$, где $\alpha(\alpha > 0)-$ постоянная независящая от T.

Очевидно, для этого достаточно, чтобы коэффициенты $a_{11}(t,x)$, $a_{12}(t,x)$, $a_{13}(t,x)$, $a_{14}(t,x)$ были бы неотрицательны при всех $t \in [t_0, \infty)$ и $x \in \Omega$ и выполнялись условия

$$a_{13}(t, v_{ij}) + |a_{14}(t, v_{ij})| \le -\alpha;$$

$$a_{24}(t, v_{ij}) + |a_{23}(t, v_{ij})| \le -\alpha$$

при всех $t \in [t_0, \infty)$ и $v_{ij} \in \Omega \backslash \Gamma$.

Эти условия следуют из условий теоремы.

Предположим вначале, что матрица $B(t)$ не зависит от t. В этом случае решение системы уравнений (4.10) имеет вид

$$Z(t) = e^{B(t-t_0)} Z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{B(t-s)} F(s) ds.$$

Переходя к нормам, имеем:

$$\|Z(t)\| \le e^{\Lambda(B)(t-t_0)} \|Z(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\Lambda(B)(t-s)} \|F(s)\| ds, \tag{4.11}$$

где $\Lambda(B)-$ логарифмическая норма матрицы B.

Умножим обе части уравнения (4.11) на $\exp\{\Lambda(B)t\}$ и введем функцию $\varphi(t) = \|Z(t)\| \exp\{-\Lambda(B)t\}$.

В результате приходим к неравенству

$$\varphi(t) \le \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\Lambda(B)s} \|F(s)\| ds. \tag{4.12}$$

Усилим это неравенство, заменив его следующим:

$$\varphi(t) \le \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (e^{-\Lambda(B)s} \|F(s)\| + \beta\varphi(s)) ds, \tag{4.13}$$

где $\beta-$ положительный параметр, величина которого будет определена ниже.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\Lambda(B)s} \|F(s)\| ds \le Ch^{\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\Lambda(B)s} ds =$$

$$= -\frac{Ch^{\alpha}}{\Lambda(B)} (e^{-\Lambda(B)t} - e^{-\Lambda(B)t_0}).$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла – Беллмана и полагая, что логарифмическая норма матрицы B отрицательная, имеем:

$$\varphi(t) \le \left(\varphi(t_0) + \frac{Ch^{\alpha}}{|\Lambda(B)|} (e^{-\Lambda(B)t} - e^{-\Lambda(B)t_0}) \right) e^{\beta(t-t_0)}.$$

Возвращаясь к норме $\|Z(t)\|$, предыдущее неравенство записываем в виде:

$$\|Z(t)\| \le \|Z(t_0)\| e^{(\Lambda(B)+\beta)(t-t_0)} + \frac{Ch^{\alpha}}{|\Lambda(B)|} (e^{\beta(t-t_0)} - e^{(\Lambda(B)+\beta)(t-t_0)}). \tag{4.14}$$

Выберем $\beta < \alpha$ и такое h, чтобы $Ch^{\alpha} \backslash |\Lambda(B)| < \|Z(t_0)\|$. Тогда существует такой промежуток времени $[t_0, t_1], t_1 = t_0 + \Delta t_0$, что при $t \in [t_0, t_1]$ $\|Z(t)\| \le \|Z(t_0)\|$, т. е. устойчивость системы уравнений (4.10) и, тем самым, устойчивость системы уравнений (4.7) доказана в предположении, что матрица $B(t, x)$ не зависит от t.

Исследуем устойчивость решения системы уравнений (4.10) при условии, что матрица $B(t)$ зависит от t.

Зафиксируем произвольное значение δ, $\delta > 0$ и положим $\|Z(t_0)\| < \delta$. Покажем, что траектория решения $Z(t)$ системы уравнений (4.10) при начальном значении $Z(t_0)$ не покидает шара $R(0, \delta)$. Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория решения $Z(t)$ покидает сферу $S(0, \delta)$, т. е. $Z(T) \in S(0, \delta)$ и при t $(t > T)$ $\|Z(t)\| > \delta$.

Представим уравнение (4.10) при $t > T$ в виде

$$\frac{dZ(t)}{dt} = B(T)Z(t) + (B(t) - B(T))Z(t) + F(t). \tag{4.15}$$

Решение уравнения (4.15) можно представить в виде

$$Z(t) = e^{B(T)(t-T)}Z(T) + \int\limits_T^t e^{B(T)(t-s)}((B(s) - B(T))Z(s) + F(s))ds. \tag{4.16}$$

Покажем, что существует такой промежуток времени $[T, T+\Delta T]$ в течение которого траектория решения $Z(t)$ системы уравнений (4.10) (при соответствующем выборе шага сетки h) не покидает шара $R(0, \delta)$.

Перейдем в (4.16) к нормам. Из непрерывности матрицы $B(t)$ следует, что для любого как угодно малого ϵ найдется такое ΔT_1, что $\|B(t) - B(T)\| \le \epsilon$ при $|t - T| \le \Delta T_1$. Величина ϵ будет определена ниже. Выше уже отмечалось, что $\|F(s)\|$ зависит от шага h сетки и определяется неравенством $\|F(s)\| \le Ch^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$.

Тогда

$$\|Z(t) \le e^{\Lambda(B(T))(t-T)}\|Z(T)\| + \int\limits_T^t e^{\Lambda(B(T))(t-s)}(\epsilon\|Z(s) + F(s))\|ds \le$$

$$\le e^{\Lambda(B(T)(t-T))}\|Z(T)\| + \int\limits_T^t e^{\Lambda(B(T))(t-s)}(\epsilon\|Z(s)\| + Ch^\alpha)ds. \tag{4.17}$$

Введем функцию $\varphi(t) = \|Z(t)\| \exp\{-\Lambda(B(T))(t)$. Тогда неравенство (4.17) можно представить в виде

$$0 \le \varphi(t) \le \varphi(T) + \int\limits_T^t (\epsilon\varphi(s) + e^{-\Lambda(B(T))s}Ch^\alpha)ds =$$

$$= \varphi(T) + Ch^\alpha \int\limits_T^t e^{-\Lambda(B(T))s}ds + \int\limits_T^t \epsilon\varphi(s)ds \le$$

$$\le \varphi(T) - \frac{Ch^\alpha}{|\Lambda(B(T))|}(e^{-\Lambda(B(T))t} - e^{-\Lambda(B(T))T}) + \int\limits_T^t \epsilon\varphi(s)ds. \tag{4.18}$$

Применив к (4.18) неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем:

$$\varphi(t) \leq (\varphi(T) + \frac{Ch^{\alpha}}{|\Lambda(B(T))|}(e^{-\Lambda(B(T))t} - e^{-\Lambda(B(T))T})e^{\epsilon(t-T)}.$$

Возвращаясь к нормам, приходим к неравенству:

$$\|Z(t)\| \leq \|Z(T)\|e^{(\Lambda(B(T))+\epsilon)(t-T)})+$$
$$+\frac{Ch^{\alpha}}{|\Lambda(B(T))|}(e^{\epsilon(t-T)} - e^{\Lambda(B(T))+\epsilon)(t-T)}). \tag{4.19}$$

За счет выбора шага h можно добиться того, что

$$Ch^{\alpha}/|\Lambda(B(T))| < \|Z(T)\|.$$

Таким образом, существует промежуток времени t, $t \in [T, T+\Delta T]$, в течение которого выполняется неравенство

$$\|Z(t)\| \leq \|Z(T)\|. \tag{4.20}$$

Так как неравенство (4.20) выполняется при любой сетке h при условии, что $h < h^*$, где $h^* = \|Z(T)\||\Lambda(B(T))|/C$, решение уравнения (4.7) устойчиво.

Теорема полностью доказана.

Глава 4

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ

1. Введение

Одно из актуальных направлений в теории автоматического управления — исследование стабилизации систем. При этом в большинстве случаев рассматриваются системы автоматического регулирования, описываемые системами дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BK(t)Cx, \qquad x \in R_n, \tag{1.1}$$

где $K(t)$ является стабилизирующей матрицей. В случае, когда стабилизирующая матрица является постоянной, основные методы стабилизации систем вида (1.1) и подробная библиография содержатся в [36], [37], [65].

Различные алгоритмы стабилизации систем вида (1.1) с переменной матрицей исследованы в [71], [73]. При этом рассматривали матрицы, элементами которых являются периодические непрерывные и разрывные функции.

Проблема Брокетта. В [117] Брокетт сформулировал следующую проблему. Дана тройка матриц (A, B, C). При каких условиях существует матрица $K(t)$ такая, что система (1.1) асимптотически устойчива.

Проблему Брокетта исследовали в [71], [73], где в ряде случаев были получены необходимые и достаточные условия стабилизации систем вида (1.1) периодическими матрицами.

В [71], [73] приведены достаточные условия, при которых существует периодическая матрица $K(t)$, дающая асимптотическую стабилизацию системы (1.1), и приведен алгоритм ее построения.

Там же исследовались условия импульсной стабилизации системы (1.1), а также условия, при которых невозможна стабилизация системы (1.1). В случае, когда $K(t)-$ скалярная функция, B и $C-$ векторы, получены условия асимптотической стабилизация системы (1.1) при $n = 2$. Эти условия, по сути дела, являются необходимыми и достаточными условиями асимптотической стабилизации систем вида (1.1) при $n = 2$ периодическими скалярными фунциями $K(t)$.

Результаты исследования проблемы Брокетта, полученные к 2002 г., приведены в [73].

Представляется актуальной разработка удобного в реализации общего алгоритма построения матриц $K(t)$, осуществляющих стабилизацию систем вида (1.1), где матрица $K(t)$ не обязательно должна быть периодической.

В разделе 3 данной главы приведены необходимые и достаточные условия существования нескольких классов стабилизирующих матриц и предложен достаточно общий способ построения семейства матриц $K(t)$, осуществляющих асимптотическую стабилизацию системы (1.1) и более общих систем. Частным случаем предложенных ниже методов стабилизации является сверхстабилизация.

Определение сверхстабилизации введено в [89].

Рассмотрим непрерывную систему

$$\frac{x(t)}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где $x \in R_n-$ состояние; $y \in R_l-$ выход; $u \in R_m-$ управление, которое ищется в форме обратной связи по выходу

$$u = Ky. \tag{1.2}$$

Тогда замкнутая система приобретает вид

$$\frac{dx}{dt} = A_c x, \quad A_c = A + BKC, \quad A_c = \{m_{ij}\},\ i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Определение 1.1 [89]. Матрица K называется сверхстабилизирующей, если

$$\sigma = \sigma(A_c) = \min_i \left(-m_{ii} - \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \right) > 0.$$

Замечание. Параметр $\sigma = \sigma(A_c)$ совпадает с логарифмической нормой матрицы A_c в предположении, что A_c определена из R_n в R_n, где R_n- n-мерное векторное пространство с нормой $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Для дискретных систем сверхстабилизация определяется аналогичным образом.

Предлагаемый ниже метод стабилизации отличается от известных методов следующим:

1) стабилизирующая матрица $K(t)$ может иметь произвольный вид;

2) метод применим к более общим системам, нежели описываемым системами вида (1.1). Он применим к системам с переменными матрицами $A(t), B(t), C(t)$ и к нелинейным системам.

Используя предлагаемый метод, можно построить три класса стабилизирующих матриц. Построение одного из этих классов очень просто и может быть выполнено в режиме реального времени.

В разделах 4 и 5 метод распространен на системы уравнений в частных производных и на системы дискретных уравнений.

2. Полуобратные матрицы

При построении алгоритмов стабилизации движения нам понадобятся полуобратные матрицы. Хорошо известно, что матрица A размера $m \times n$ может не иметь ни левой, ни правой обратной матрицы. В некоторой степени их аналогом являются полуобратные матрицы, которые вводятся следующим образом.

Определение 2.1 [99]. Матрица A_0^{-1} называется полуобратной к матрице A, если выполнено соотношение $AA_0^{-1}A = A$.

Докажем, следуя [99], что любая матрица A имеет полуобратную.

Для этого воспользуемся понятием (M, N)-преобразования прямоугольных матриц.

Матрица A размера $m \times n$ остается матрицей того же размера, если умножить ее слева на квадратную матрицу M порядка m, а справа – на квадратную матрицу N порядка n :

$$A_1 = MAN.$$

Пусть матрицы M и N– неособенные. Тогда $A = M^{-1}A_1N^{-1}$ и говорят, что матрица A_1 получается из A (M, N)-преобразованием.

Очевидно, что (M, N)-преобразование любой неособенной матрицы дает неособенную матрицу.

(M, N)-преобразование матрицы, имеющей левую (правую) обратную матрицу, приводит к матрице, имеющей левую (правую) обратную матрицу.

Матрицей перестановок называется матрица $\Pi_{s,k} = \{p_{s,k}\}$, полученная из единичной матрицы перестановкой элементов s и k строк.

Справедлива формула: $\Pi_{s,k}\Pi_{s,k} = I$, т. е. матрица $\Pi_{s,k}$ обратна самой себе.

Обозначим через $T^{(r)}_{m,n}$ матрицу размера $m \times n$

$$T^{(r)}_{m,n} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

у которой I_r– единичная матрица размера $r \times r$.

Теорема 2.1 [99]. С помощью (M, N)-преобразования любую матрицу можно представить в виде

$$A = M^{-1}T^{(r)}_{m,n}N^{-1}$$

или, что то же самое,

$$MAN = T^{(r)}_{m,n}.$$

Если матрица A имеет хотя бы одну правую обратную, то всякая полуобратная A_0^{-1} также будет правой обратной для A. В самом деле, умножив $AA_0^{-1}A = A$ справа на A^{-1}, имеем:

$$AA_0^{-1} = I.$$

Если у A есть левая обратная, то и A_0^{-1} будет левой обратной для A. Легко также видеть, что всякая левая или правая обратная матрица для A является полуобратной. Известно, что данная матрица A может не иметь ни правой, ни левой обратных матриц. Покажем, однако, что любая матрица A всегда имеет хотя бы одну полуобратную. Для этого воспользуемся (M, N)-преобразованием.

Пусть A имеет полуобратную Q. Подвергаем A (M, N)-преобразованию, а Q – (N^{-1}, M^{-1})-преобразованию:

$$A_1 = MAN; \quad Q_1 = N^{-1}QM^{-1}.$$

Матрица Q_1 будет служить полуобратной для A_1. В самом деле,

$$A_1Q_1A_1 = MANN^{-1}QM^{-1}MAN = MAN = A_1.$$

Таким образом, для двух матриц A_1 и A_2, связанных (M, N)-преобразованием, существует взаимно однозначное соответствие полуобратных.

Для матрицы $T_{m,n}^{(r)}$ полуобратная, очевидно, существует и равна $T_{n,m}^{(r)}$:

$$T_{m,n}^{(r)}T_{n,m}^{(r)}T_{m,n}^{(r)} = T_{m,n}^{(r)}.$$

Отсюда и из теоремы 2.1 следует, что и для произвольной матрицы

$$A = M^{-1}T_{m,n}^{(r)}N^{-1} \tag{2.1}$$

тоже существует полуобратная.

Найдем, следуя [99], общий вид всех матриц $(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1}-$ полуобратных для $T_{m,n}^{(r)}$.

Будем искать $(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1}-$ в виде матрицы

$$(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1} = \left(\frac{U|V}{W|Z}\right) \tag{2.2}$$

с подлежащими определению матрицами U, V, W, Z.

Здесь $U - r \times r$-матрица, $V - r \times (m-r)$-матрица, $W - (n-r) \times r$-матрица, $Z - (n-r) \times (m-r)$-матрица.

Из

$$T_{m,n}^{(r)}(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1}T_{m,n}^{(r)} = \left(\frac{U|V}{0|0}\right)T_{m,n}^{(r)} = \left(\frac{U|0}{0|0}\right) \tag{2.3}$$

следует, что для всякой полуобратной матрицы $(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1}$ клетка U должна равняться I_r, а клетки V, W и Z произвольны, т. е.

$$(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1} = \left(\frac{I_r|V}{W|Z}\right). \tag{2.4}$$

Таким образом, общее представление для полуобратной матрицы имеет вид

$$A_0^{-1} = N(T_{m,n}^{(r)})_0^{-1}M = N\left(\frac{I_r|V}{W|Z}\right)M. \tag{2.5}$$

Из формул $T_{m,n}^{(r)} = \left(\frac{I_r}{0}\right)\}m I_r \overbrace{(I_r|0)}^{n} = \left(\frac{I_r}{0}\right)\}m \overbrace{(I_r|0)}^{n}$ и $A = M^{-1}T_{m,n}^{(r)}N^{-1}$ для матрицы A получается представление

$$A = BC, \tag{2.6}$$

где $B = M^{-1}\left(\frac{I_r}{0}\right)-$ матрица размера $m \times r$, допускающая левую обратную, а $C = (I_r|0)N^{-1}$ матрица размера $r \times n$, допускающая правую обратную.

Разложение вида (2.6) позволяет дать еще одно явное выражение для полуобратных матриц. Именно, можно положить

$$A_0^{-1} = C^{-1}B^{-1}. \tag{2.7}$$

Действительно, при этом, как легко видеть, $AA_0^{-1}A = A$.

В монографии С. Л. Соболева [99, стр. 26] отмечается, что не все полуобратные матрицы имеют вид (2.7). Тем не менее для дальнейшего нам достаточно факта существования полуобратной матрицы и наличия способа ее построения.

3. Стабилизационная проблема Брокетта для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим наряду с системой (1.1) более общую систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)K(t)C(t)x, \qquad x \in R_n, \tag{3.1}$$

в которой $A(t), B(t), C(t)-$ заданные матрицы. Требуется определить условия, при которых существует матрица $K(t)$, такая, что тривиальное решение системы уравнений (3.1) асимптотически устойчиво.

Систему (3.1) будем исследовать в пространствах R_n и E_n, где E_n- евклидово пространство.

Будем говорить, что $n \times n$ матрица $D(t)$ принадлежит классу S, если тривиальное решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = D(t)x, \qquad x \in R_n,$$

устойчиво в целом.

Частными случаями класса S являются классы S_1, S_2, S_3.

Будем говорить, что $n \times n$ матрица $D(t)$ с непрерывными элементами принадлежит классу S_1 или S_2, если при любом $t(0 \le t < \infty)$ ее логарифмическая норма отрицательна и $\Lambda D(t) \le -\alpha, \alpha > 0$ или спектр матрицы $\mathrm{Re}D(t) = (D(t)+D^*(t))/2$ отрицателен при любом $t(0 \le t < \infty)$ и $\mathrm{Re}D(t) \le -\alpha, \alpha > 0$.

Будем говорить, что $n \times n$ матрица D принадлежит классу S_3, если ее спектр лежит в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной, а ее элементы $d_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, являются константами, не зависящими от t.

Пусть существует матрица $K(t)$, дающая асимптотическую стабилизацию системы (3.1). Если $A(t)+B(t)K(t)C(t) \in S, S_1, S_2, S_3$, то будем говорить, что осуществляется стабилизация класса S, S_1, S_2, S_3 соответственно.

Исследуем асимптотическую устойчивость системы уравнений (3.1) в предположении, что матрицы $B(t)$ и $C(t)$ необратимы. Кроме того, предположим, что $C(t) - n_1 \times n$-матрица, $K(t) - n_2 \times n_1$-матрица, $B(t) - n \times n_2$-матрица.

Обозначим через B_0^{-1} полуобратную матрицу для матрицы B. Полуобратная матрица вводится формулой $B = BB_0^{-1}B$. В разделе 2 было отмечено, что полуобратные матрицы всегда существуют, но определяются неединственным способом. Каждой матрице размера $m \times n$ можно поставить в соответствие ее левые и правые аннулирующие матрицы: $\tilde{B}_l^{-1} = I_m - BB_0^{-1}$, $\tilde{B}_r^{-1} = I_n - B_0^{-1}B$. Здесь I_n и I_m-единичные матрицы размера $n \times n$ и $m \times m$ соответственно.

Следующее утверждение описывает необходимые и достаточные условия существования семейств стабилизирующих матриц.

Теорема 3.1. Пусть B_0^{-1} и C_0^{-1}– полуобратные матрицы для матриц B и C. Для того чтобы существовала стабилизация класса S, S_1, S_2, S_3, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $D(t)$, принадлежащая соответственно классу $S, S_1, S_2,\ S_3$, для которой справедливы равенства

$$BB_0^{-1}D_1(t) = D_1(t); \qquad D_1(t)C_0^{-1}C = D_1(t),$$

где $D_1(t) = D(t) - A(t)$.

Тогда матрица $K(t) = B_0^{-1}D_1(t)C_0^{-1}$ осуществляет асимптотическую стабилизацию системы (3.1), приводящую к тривиальному решению.

В случае, когда матрицы $B(t)$ и $C(t)$ обратимы при любом $0 \le t < \infty$, из теоремы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть при любом $t (t \ge 0)$ матрицы B и C непрерывно обратимы. Тогда существует несчетное число матриц $K(t)$, при которых система уравнений (3.1) будет асимптотически устойчивой. В качестве $K(t)$ могут быть взяты матрицы

$$K(t) = B^{-1}(t)(D(t) - A(t))C^{-1}(t),$$

где $D(t)$– матрица, принадлежащая одному из классов S, S_1, S_2, S_3.

Доказательство теоремы 3.1. Для доказательства осуществимости асимптотической стабилизации системы уравнений (3.1) нужно показать, что существуют такие матрицы $K(t)$ и $D(t) \in S, S_1, S_2, S_3$, что

$$A(t) + B(t)K(t)C(t) = D(t). \tag{3.2}$$

Отметим, что доказательство устойчивости в целом системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = D(t)x,$$

где $D(t) \in S_1, S_2$, приведено во второй главе.

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть существуют матрицы $K(t)$ и $D(t)$, дающие асимптотическую стабилизацию системы уравнений (3.1). Тогда, умножая уравнение (3.2) на $\tilde{B}_l^{-1}$, имеем:

$$B(t)B_0^{-1}(t)D_1(t) = D_1(t).$$

Умножая уравнение (3.2) на $\tilde{B}_r^{-1}$, имеем:

$$D_1(t)C_0^{-1}(t)C(t) = D_1(t).$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть выполнены условия

$$D_1(t) = B(t)B_0^{-1}(t)D_1(t);\ D_1(t) = D_1(t)C_0^{-1}(t)C(t), \tag{3.3}$$

где $D_1 = A - D, D \in S, S_1, S_2, S_3$.

Нужно показать, что существует матрица $K(t)$, такая, что

$$B(t)K(t)C(t) = D_1(t). \tag{3.4}$$

Полагая

$$K(t) = B_0^{-1}(t)D_1(t)C_0^{-1}(t)$$

и используя равенства (3.3), превращаем (3.4) в тождество.

Теорема доказана.

Анализируя доказательство теоремы 3.1, можно сделать следующее заключение.

Теорема 3.3. Для осуществления асимптотической стабилизации системы (3.1) достаточно существования непрерывной матрицы $D(t) \in S, S_1,\ S_2, S_3$ и матрицы $K(t)$, удовлетворяющих уравнению:

$$B(t)K(t)C(t) = D(t) - A(t). \tag{3.5}$$

Замечание. Утверждения, аналогичные теоремам 3.1 − 3.3, справедливы и для других классов стабилизирующих матриц.

Таким образом, для осуществления стабилизации системы (3.1) нужно найти матрицу $D(t)$, принадлежащую одному из классов S, S_1, S_2, S_3, и матрицу $K(t)$, удовлетворяющих уравнению (3.5). Покажем, что в случае, когда ищется матрица $D(t) \in S_1$, построение матриц $D(t)$ и $K(t)$ не вызывает затруднений.

Для определенности будем считать, что матрицы $A(t), B(t), C(t)$, $K(t)$− квадратные. Обозначим элементы матрицы $K(t)$ через $\{k_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, а элементы матрицы $D(t)$ через $\{d_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Во второй главе было отмечено, что для того чтобы логарифмическая норма матрицы $D(t)$ при каждом t была отрицательна в пространстве R_n с метриками

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|; \qquad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

достаточно выполнения условий:

$$d_{ii}(t) + \sum_{j=1}^{n}{}' |d_{ij}(t)| < 0, \quad d_{ii}(t) + \sum_{j=1}^{n}{}' |d_{ji}(t)| < 0, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{3.6}$$

Здесь $\sum'$ означает суммирование по $j \neq i$.

Таким образом, задача стабилизации сводится к решению системы уравнений

$$B(t)K(t)C(t) = D - A(t) \tag{3.7}$$

при ограничениях (3.6).

Система (3.7) при ограничениях (3.6) состоит из n^2 уравнений и n ограничений, связывающих при каждом значении t $2n^2$ неизвестных $\{k_{ij}(t)\}$, $\{d_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Каждое из множества решений задачи (3.6) − (3.7) (если они существуют) определяет стабилизирующую матрицу $K(t)$. Для решения системы уравнений (3.7) при ограничениях (3.6) можно привлечь методы линейного программирования [111]. На множестве этих матриц можно задавать различные функционалы.

Рассмотрим модельный пример, в котором для простоты обозначений ограничимся случаем $n = 2$.

Дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)K(t)C(t)x.$$

Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2, & \frac{1}{t^2+1} \\ \frac{1}{t+1}, & -10 \end{pmatrix};$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} t, & 1 \\ t, & 1 \end{pmatrix};$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 2, & 0,5 \\ 4, & 1 \end{pmatrix}.$$

Для простоты обозначений будем считать, что матрицы D от t не зависят. Для нахождения матрицы $K(t)$ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{gathered} 2k_{11}(t)t + 4k_{12}(t)t + 2k_{21}(t) + 4k_{22}(t) = d_{11} - 2; \\ 0,5k_{11}(t)t + k_{12}(t)t + 0,5k_{21}(t) + k_{22}(t) = d_{12} - \frac{1}{t^2+1}; \\ 2k_{11}(t)t + 4k_{12}(t)t + 2k_{21}(t) + 4k_{22}(t) = d_{21} - \frac{1}{t+1}; \\ 0,5k_{11}(t)t + k_{12}(t)t + 0,5k_{21}(t) + k_{22}(t) = d_{22} + 10 \end{gathered} \tag{3.8}$$

при дополнительных условиях

$$d_{11} < 0;\ d_{22} < 0;\ |d_{11}| > |d_{12}|;\ |d_{22}| > |d_{21}|. \tag{3.9}$$

Перепишем систему (3.8) в виде

$$\begin{gathered} d_{11} = 2 + 2k_{11}(t)t + 4k_{12}(t)t + 2k_{21}(t) + 4k_{22}(t); \\ d_{12} = \frac{1}{t^2+1} + 0,5k_{11}(t)t + k_{12}(t)t + 0,5k_{21}(t) + k_{22}(t); \\ d_{21} = \frac{1}{t+1} + 2k_{11}t + 4k_{12}t + 2k_{21} + 4k_{22}; \\ d_{22} = -10 + 0,5k_{11}t + k_{12}t + 0,5k_{21} + k_{22}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Из первых двух условий (3.9) имеем

$$2 + 2k_{11}(t)t + 4k_{12}(t)t + 2k_{21}(t) + 4k_{22}(t) < 0;$$

$$-10+0,5k_{11}(t)t+k_{12}(t)t+0,5k_{21}(t)+k_{22}(t)<0,$$

и, следовательно,

$$k_{11}(t)t+2k_{12}(t)t+k_{21}(t)+2k_{22}(t)<-1. \tag{3.11}$$

При выполнении неравенства (3.11) можно усилить последние два условия системы (3.9) :

$$2+2k_{11}(t)t+4k_{12}(t)t+2k_{21}(t)+4k_{22}(t)<$$
$$<-\frac{1}{t^2+1}+0,5k_{11}(t)t+k_{12}(t)t+0,5k_{21}(t)+k_{22}(t)<-|d_{12}|<0;$$
$$-10+0,5k_{11}(t)t+k_{12}(t)t+0,5k_{21}(t)+k_{22}(t)<$$
$$<\frac{1}{t+1}+2k_{11}(t)t+4k_{12}(t)t+2k_{21}(t)+4k_{22}(t)<0. \tag{3.12}$$

Неравенства (3.11), (3.12) окончательно можно предствить в виде

$$k_{11}(t)t+2k_{12}(t)t+k_{21}(t)+2k_{22}(t)<-1;$$
$$\frac{3}{2}k_{11}(t)t+3k_{12}(t)t+\frac{3}{2}k_{21}(t)+3k_{22}(t)<-\frac{1}{t^2+1}-2;$$
$$\frac{3}{2}k_{11}(t)t+3k_{12}(t)t+\frac{3}{2}k_{21}(t)+3k_{22}(t)>-10-\frac{1}{t+1}.$$

Отсюда получаем окончательные условия для нахождения матрицы $K(t)$:

$$-\frac{20}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{t+1}<k_{11}(t)t+2k_{12}(t)t+k_{21}(t)+2k_{22}(t)<$$
$$<\min\left(-1,-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{t^2+1}\right).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеется бесконечное множество стабилизирующих матриц, в число которых также входят и постоянные матрицы. Например, матрица $k_{11}=0; k_{12}=0; k_{21}=-1;$ $k_{22}=-2.$

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений проблема Брокетта может быть сформулирована следующим образом.

Дана $l \times l$ матрица $B(t)$, вектор-функции $A(t,x(t))$ и $C(t,x(t))$, где $x(t) = (x_1(t),...,x_l(t))$, $A(t,x(t)) = (a_1(t,x(t)),...,a_l(t,x(t)))$ и $C(t,x(t)) = (c_1(t,x(t)),...,c_l(t,x(t)))$.

Требуется найти матрицу $K(t)$, осуществляющую стабилизацию к нулю решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x(t)) + B(t)K(t)C(t,x(t)). \tag{3.13}$$

Возьмем произвольный элемент $x(t)$ и представим элементы $a_i(t,x(t))$, $i = 1,2,\dots,l$, в виде

$$a_i(t,x(t)) = \sum_{k=1}^{l}{}' \alpha_{ik} \frac{a_i(t,x(t))}{x_k(t)} x_k(t), \quad i = 1,2,\dots,l, \tag{3.14}$$

где $\sum'$ означает суммирование по k, таким, что $x_k(t) \neq 0$, $\alpha_{i,k} \geq 0$, $\sum_{k=1}^{l}{}'\alpha_{ik} = 1$.

Аналогичным образом элементы вектор-функции $C(t,x(t))$ можно представить в виде

$$c_i(t,x(t)) = \sum_{k=1}^{l}{}' \gamma_{ik} \frac{c_i(t,x(t))}{x_k(t)} x_k(t), \quad i = 1,2,\dots,l, \tag{3.15}$$

где $\gamma_{ik} \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{l}{}'\gamma_{ik} = 1, i = 1,2,\dots,l.$

Отметим, что коэффициенты α_{ik} и γ_{ik}, $i,k = 1,2,\dots,l$, могут зависеть как от времени t, так и от текущего значения $x(t)$. Для простоты обозначений ниже полагаем α_{ik} и $\gamma_{ik}, i,k = 1,2,\dots,l$, константами.

Каждому вектору $x(t)$ поставим в соответствие матрицы $A(t,\{\alpha_{ik}\}_1^l, x(t))$, составленные из элементов:

$$a_{ik}(t,\{\alpha_{ik}\}_1^l\}, x(t)) = \begin{cases} \alpha_{ik}\frac{a_i(t,x(t))}{x_k(t)}, & x_k(t) \neq 0, \\ 0, & x_k(t) = 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

$i,k = 1,2,\dots,l.$

Аналогично каждому вектору $x(t)$ поставим в соответствие матрицы $C(t,\{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t))$, составленные из элементов:

$$c_{ik}(t,\{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t)) = \begin{cases} \gamma_{ik}\frac{c_i(t,x(t))}{x_k(t)}, & x_k(t) \neq 0, \\ 0, & x_k(t) = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

$i,k = 1,2,\dots,l.$

Пользуясь представлениями (3.16) и (3.17), систему уравнений (3.13) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \{\alpha_{ik}\}_1^l, x(t))x(t) + B(t)K(t)C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t))x(t). \qquad (3.18)$$

Теорема 3.4. Пусть существуют наборы $\{\alpha_{ik}\}$ и $\{\gamma_{ik}\}, i, k = 1, 2, \ldots, l$, такие, что для любого $x \in R(0, \delta)$ и любого t $(t_0 \leq t < \infty)$ матрицы $A(t, \{\alpha_{ik}\}_1^l, x(t))$ и $C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t))$ непрерывно обратимы. Тогда существует матрица $K(t)$, осуществляющая стабилизацию к нулю решения системы уравнений (3.13) при любом начальном значении $x \in R(0, \delta)$.

Доказательство. Пусть $D - l \times l-$ матрица, собственные значения которой лежат в левой полуплоскости. Из условий теоремы следует, что система уравнений (3.13) может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \{\alpha_{ik}\}_1^l, x(t))x(t) + B(t)K(t)C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t))x(t)). \qquad (3.19)$$

Приравнивая правую часть (3.19) вектор-функции Dx имеем

$$\frac{dx}{dt} = Dx. \qquad (3.20)$$

Из расположения спектра матрицы D следует, что система (3.20) асимптотически устойчива.

Так как матрицы $B(t)$ и $C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t))$ обратимы,

$$K(t) = B^{-1}(t)(D - A(t, \{\alpha_{ik}\}_1^l, x(t)))(C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t)))^{-1}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы $B(t)$ и $C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t))$ необратимы.

Введем матрицы $D(t)$, принадлежащие одному из классов матриц S_1, S_2.

Зафиксируем наборы $\alpha_{ik}(t)$ и $\gamma_{ik}(t)$, положив, например, $\alpha_{ik}(t) = = \gamma_{ik}(t) = \frac{1}{m(t)}$, где $m(t)-$ число отличных от нуля элементов вектора $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_l(t))$.

Обозначим через $(B_0(t))^{-1}$ и $(C_0(t, \{\gamma_{ik}(t)\}_1^l, x(t)))^{-1}$- полуобратные матрицы к матрицам $B(t)$ и $C(t, \{\gamma_{ik}(t)\}_1^l, x(t))$; через $D_1(t)-$ разность $D_1(t) = D(t) - A(t, \{\alpha_{ik}(t)\}_1^l, x(t))$.

Теорема 3.5. Пусть $(B_0(t))^{-1}$ и $(C_0(t, \{\gamma_{ik}(t)\}_1^l, x(t)))^{-1}$– полуобратные матрицы для матриц $B(t)$ и $C(t, \{\gamma_{ik}(t)\}_1^l, x(t))$.

Для того чтобы существовала стабилизация класса S_1, S_2 для системы уравнений (3.13) необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $D(t)$, принадлежащая соответственно классу S_1, S_2, для которой справедливы равенства $B(t)(B_0(t))^{-1}D_1(t) = D_1(t)$,
$D_1(t)(C_0(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t)))^{-1}C(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t)) = D_1(t)$.

Тогда матрица

$$K(t) = (B_0(t))^{-1}D_1(t)(C_0(t, \{\gamma_{ik}\}_1^l, x(t)))^{-1}$$

осуществляет стабилизацию системы уравнений (3.13), приводящую к тривиальному решению.

Доказательство теоремы является объединением доказательств теорем 3.1 и предыдущей теоремы и поэтому опускается.

Заканчивая этот раздел, остановимся на обобщенной проблеме Брокетта [117].

Обобщенная проблема Брокетта. Дано семейство постоянных матриц $(A, B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_m)$. Требуется определить при каких условиях существует последовательность зависящих от времени матриц $K_1(t), \ldots, K_m(t)$, таких, что система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i K_i(t) C_i(t) X(t) \tag{3.21}$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t) K_i(t) C_i(t) X(t), \tag{3.22}$$

где $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_l(t))$, $A(t), B_i(t), C_i(t)$– $l \times l$ матрицы с элементами, зависящими от t.

Требуется найти последовательность $l \times l$ матриц $K_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляющих асимптотическую стабилизацию решения системы (3.21) при любом начальном значении $X(t_0) = X_0$.

Теорема 3.6. Пусть матрицы $B_i(t)$ и $C_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, обратимы при любом t, $t_0 \leq t < \infty$. Тогда существует бесконечное число матриц $K_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляющих асимптотическую стабилизацию решения системы уравнений (3.22).

Замечание. Пусть $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $l \times l$, матрица D с постоянными коэффициентами имеет собственные значения, расположенные в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной. Тогда матрицы $K_i = B_i^{-1}(\lambda_i(D - A))C_i^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляют асимптотическую стабилизацию к нулю решения системы уравнений (3.22) при любом начальном значении.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$A(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)K_i(t)C_i(t) = D, \tag{3.23}$$

где $D-$ $l \times l-$ матрица с постоянными коэффициентами и со спектром, сосредоточенным в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной.

Уравнение (3.23) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i A(t)X(t) + B_i(t)K_i(t)C_i(t)X(t) - \lambda_i D) = 0. \tag{3.24}$$

Тогда решение системы уравнений

$$\lambda_i A(t)X(t) + B_i(t)K_i(t)C_i(t)X(t) = \lambda_i D, \tag{3.25}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, является одним из решений системы (3.24) и, следовательно, (3.23).

Матрицы $K_i(t) = (B_i(t))^{-1}(\lambda_i D - \lambda_i A)(C_i(t))^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, являются решениями системы (3.25).

Отсюда следует справедливость теоремы и замечания к ней.

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы $B_i(t)$ и $C_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, необратимы.

Обозначим через $(B_{i,0}(t))^{-1}$ и $(C_{i,0}(t))^{-1}$ полуобратные матрицы для матриц $B_i(t)$ и $C_i(t)$, а через $\tilde{B}_{i,l}^{-1}(t) = I - B_i(t)(B_{i,0}(t))^{-1}$, $\tilde{C}_{i,l}^{-1}(t) = I - C_i(t)(C_{i,0}(t))^{-1}$, $\tilde{B}_{i,r}^{-1}(t) = I - (B_{i,0}(t))^{-1}B_i(t)$, $\tilde{C}_{i,r}^{-1}(t) = I - (C_{i,0}(t))^{-1}C_i(t) -$ левые и правые аннулирующие матрицы для матриц $B_i(t)$, $C_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема 3.7. Пусть $(B_{i,0}(t))^{-1}$ и $(C_{i,0}(t))^{-1}-$ полуобратные матрицы для $B_i(t)$ и $C_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $t_0 \leq t < \infty$. Для того чтобы существовала стабилизация класса S_1 и S_2, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность матриц $D(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, и чисел

$\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda_i(t) \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \equiv 1$, при которых справедливы равенства

$$B_i(t)(B_{i,0}(t))^{-1}D_i(t) = D_i(t), D_i(t)(C_{i,0}(t))^{-1}C_i(t) = D_i(t),$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, где $D_i(t) = \lambda_i(t)(D(t) - A(t))$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда матрицы $K_i(t) = (B_{i,0}(t))^{-1}D_i(t)(C_{i,0}(t))^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляют асимптотическую стабилизацию системы уравнений (3.22) к нулю.

Доказательство теоремы является объединением доказательства предыдущей теоремы и теоремы 3.1 и поэтому опускается.

Обобщенная проблема Брокетта для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений может быть сформулирована следующим образом.

Дана последовательность $l \times l$ матриц $B_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $t_0 \leq t < < \infty$, и последовательность вектор-функций

$$A(t, X(t)) = (a_1(t, X(t)), \ldots, a_l(t, X(t))),$$

$$C_i(t, X(t)) = (c_{i1}(t, X(t)), \ldots, c_{il}(t, X(t))),$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_l(t))$. Требуется построить последовательность матриц $K_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляющих асимптотическую стабилизацию к нулю решения системы уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t, X(t)) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)K_i(t)C_i(t, X(t)). \tag{3.26}$$

Здесь $A(t, 0) \equiv 0$; $C_i(t, 0) \equiv 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $t_0 \leq t < \infty$.

Введем коэффициенты $\{\alpha_{jk}(t)\}$ и $\{\gamma_{jk}(t)\}, j, k = 1, 2, \ldots, l$, положив $\alpha_{jk}(t) = \gamma_{jk}(t) = 1/n(t)$, где $n(t)-$ число отличных от нуля элементов вектора $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_l(t))$.(Отметим, что, как следует из предыдущего, возможны и другие способы определения коэффициентов $\{\alpha_{jk}(t)\}$, $\gamma_{jk}(t)\}$, но для простоты обозначений останавливаемся на введенном выше).

Тогда систему уравнений (3.26) можно представить в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t, \{\alpha_{jk}\}_1^l, x(t))x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)K_i(t)C_i(t, \{\gamma_{jk}\}_1^l, x(t))x(t). \tag{3.27}$$

Правую часть системы уравнений (3.27) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A(t, \{\alpha_{jk}\}_1^l, x(t))x(t)) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)K_i(t)C_i(t, \{\gamma_{jk}\}_1^l, x(t))x(t). \tag{3.28}$$

Теорема 3.8. Пусть $(B_{i,0}(t))^{-1}$ и $(C_{i,0}(t,\{\gamma_{jk}(t)\}_1^l, x(t)))^{-1}$– полуобратные матрицы для матриц $B_i(t)$ и $C_i(t,\{\gamma_{jk}(t)\}_1^l, x(t))$. Для того чтобы существовала стабилизация класса S_1, S_2 необходимо и достаточно , чтобы существовала матрица $D(t)$, принадлежащая соответственно классу S_1, S_2, для которой выполнялись равенства

$$B_i(t)(B_{i,0}(t))^{-1}D_i(t) = D_i(t);$$

$$D_i(t)(C_{i,0}(t,\{\gamma_{jk}(t)\}_1^l, x(t)))^{-1}C_{i,0}(t,\{\gamma_{jk}(t)\}_1^l, x(t)) = D_i(t),\ i = 1,2,\ldots,l,$$

где $D_i(t) = \lambda_i D(t) - \lambda_i A(t,\{\alpha_{jk}\}_1^l, x(t))$.
Тогда матрицы $K_i(t) = (B_{i,0}(t))^{-1}D_i(t)\,(C_{i,0}(t,\{\gamma_{jk}(t)\}_1^l, x(t)))^{-1}$, $i = 1,2,\ldots,l$, осуществляют стабилизацию уравнений (3.26), приводящую к тривиальному решению.

Доказательство. Приравняем выражение (3.28) вектор-функции $D(t)x(t)$. Частным решением этого уравнения является решение системы уравнений $\lambda_i A(t,\{\alpha_{jk}\}_1^l, x(t))x(t) + B_i(t)K_i(t)C_i(t,\{\gamma_{ijk}(t)\}_1^l, x(t))x(t) = \lambda_i D(t)x(t)\ i = 1,2,\ldots,l$.

Применяя к каждому из уравнений, входящих в последнюю систему, рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.1, завершаем доказательство теоремы.

4. Проблема Брокетта для систем дифференциальных уравнений в частных производных

В предыдущем разделе было дано решение проблемы Брокетта для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом разделе проблема Брокетта распространяется на системы уравнений в частных производных и дается ее решение.

Пусть $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $L(t)$, $M(t)$ данные $n\times n$-матрицы, где $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $C(t) = \{c_{ij}(t)\}$, $L(t) = \{l_{ij}(t)\}$, $M(t) = \{m_{ij}(t)\}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} = A(t)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + B(t)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + C(t)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + L(t)K(t)M(t)u(t,x_1,x_2) \qquad (4.1)$$

с начальными условиями

$$u(t_0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2), \tag{4.2}$$

где

$$u(t, x_1, x_2) = u(t, x) = (u_1(t, x), \ldots, u_n(t, x)), \quad x = (x_1, x_2).$$

Проблема Брокетта формулируется следующим образом. Пусть даны матрицы (A, B, C, L, M). Требуется найти матрицу $K(t)$ асимптотически стабилизирующую тривиальное решение системы (4.1).

Будем исследовать проблему Брокетта в гильбертовом пространстве X функций $g = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ с нормой

$$\|g\| = \max_{i=1,2,\ldots,n} [\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_i(x)|^2 dx_1 dx_2]^{1/2}.$$

Для каждого фиксированного значения t норма вектор-функции $u(t, x)$ определяется формулой

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1,2,\ldots,n} [\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_i(t, x)|^2 dx_1 dx_2]^{1/2}.$$

В разделе 2 главы 3 был предложен следующий метод исследования устойчивости решений систем уравнений в частных производных.

Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = A(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_1^2} + B(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_1 \partial x_2} +$$

$$+ C(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_2^2} + L(t) u(t, x) \tag{4.3}$$

при условиях Коши

$$u(t_0, x) = u_0(x). \tag{4.4}$$

Применим преобразование Фурье по переменным x_1 и x_2 к уравнению (4.3). Напомним, что прямое и обратное преобразования Фурье определяются формулами

$$U(t, \omega_1, \omega_2) = F u(t, x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t, x_1, x_2) \exp\{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\} dx_1 dx_2;$$

$$u(t, x_1, x_2) = F^{-1} U(t, \omega_1, \omega_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t, \omega_1, \omega_2) \exp\{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\} d\omega_1 d\omega_2.$$

В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами ω_1, ω_2 :

$$\frac{\partial U(t, \omega)}{\partial t} = S(t, \omega) U(t, \omega), \tag{4.5}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $S(t, \omega) = \{s_{ij}(t, \omega)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $s_{ij}(t, \omega) =$ $= -(a_{ij}(t)\omega_1^2 + +b_{ij}(t)\omega_1\omega_2 + c_{ij}(t)\omega_2^2) + l_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Систему (4.5) будем рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами (ω_1, ω_2). Асимптотическую устойчивость решения системы уравнений (4.5) будем исследовать в пространстве R_n с нормой

$$\|U(t, \omega_1, \omega_2)\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |u_i(t, \omega_1, \omega_2)|, \quad \|U(t, \omega_1, \omega_2)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i(t, \omega_1, \omega_2)|.$$

Ниже, для определенности, используется только первая норма. Для простоты будем писать $\|U(t)\|_\infty$ вместо $\|U(t, \omega_1, \omega_2)\|_\infty$.

В разделе 2 главы 3 показано, что для $t \ge T$ ($T-$ произвольный момент времени)

$$U(t, \omega) = e^{S(T,\omega)} U(T, \omega) + \int\limits_{T}^{t} e^{S(T,\omega)(t-\tau)} F(\tau, U(\tau)) d\tau, \tag{4.6}$$

где $F(\tau, U(\tau)) = (S(\tau, \omega) - S(T, \omega)) U(t, \omega)$.

Предположим для определенности, что $\Lambda(S(T, \omega)) < -\alpha$, $\alpha = \text{const}$ для любых $T \ge t_0$ и $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$. Из уравнения (4.6) следует, что для достаточно малого $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ существует интервал $T \le t \le T + \Delta T$, в котором

$$\|U(t, \omega)\|_\infty \le e^{-(\alpha - \varepsilon)(t-T)} \|U(T, \omega)\|_\infty \le \|U(T, \omega)\|_\infty. \tag{4.7}$$

Отметим, что неравенство (4.7) справедливо при всех ω_1, ω_2 $(-\infty <$ $< \omega_1, \omega_2 < \infty)$.

В разделе 2 главы 3 было показано, что в этом случае тривиальное решение системы уравнений (4.3) асимптотически устойчиво в пространстве X.

Таким образом, для решения проблемы Брокетта для систем уравнений в частных производных достаточно найти матрицу $K(t)$, такую, что логарифмическая норма матрицы

$$-A(t)\omega_1^2 - B(t)\omega_1\omega_2 - C(t)\omega_2^2 + L(t)K(t)M(t)$$

неотрицательна и удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(-A(t)\omega_1^2 - B(t)\omega_1\omega_2 - C(t)\omega_2^2 + L(t)K(t)M(t)) \le -\alpha, \quad \alpha > 0,$$

независимо от параметров ω_1, ω_2 $(-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty)$.

В главе 1 было отмечено, что $\Lambda(A + B) \le \Lambda(A) + \Lambda(B)$.

Следовательно, $\Lambda(-A(t)\omega_1^2 - B(t)\omega_1\omega_2 - C(t)\omega_2^2 + L(t)K(t)M(t)) \le$ $\le \Lambda(-A(t)\omega_1^2 - B(t)\omega_1\omega_2 - C(t)\omega_2^2) + \Lambda(L(t)K(t)M(t))$.

Предположим, что $\Lambda(-A(t)\omega_1^2 - B(t)\omega_1\omega_2 - C(t)\omega_2^2) \le \beta < \infty$ независимо от $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$.

Пусть $-\alpha + \beta < 0$, $\alpha > 0$.

Введем пространство S_1 матриц $D(t)$, таких, что $\Lambda(D(t)) < -\alpha$.

Для решения проблемы Брокетта необходимо решить операторное уравнение

$$L(t)K(t)M(t) = D(t), \tag{4.8}$$

где $D(t) \in S_1$.

Если матрицы $L(t)$ и $M(t)$ обратимы, уравнение (4.8) имеет решение

$$K(t) = L^{-1}(t)S(t)M^{-1}(t),$$

и проблема Брокетта имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим случай, когда матрицы $L(t)$ и $M(t)$ не имеют обратных. В этом случае справедливы следующие утверждения.

Пусть $L_0^{-1}(t)$– полуобратная матрица для матрицы $L(t)$. Пусть $M_0^{-1}(t)$– полуобратная матрица для матрицы $M(t)$.

Известно, что для каждой матрицы $C(t)$ существует полуобратная матрица $C_0^{-1}(t)$. Для каждой матрицы $C(t)$ можно построить правую и левую аннулирующие матрицы $\tilde{C}_l^{-1}(t)$ и $\tilde{C}_r^{-1}(t)$.

Теорема 4.1. Пусть логарифмическая норма $\Lambda(-A(t)\omega_1^2 - B(t)\omega_1\omega_2 -$ $- C(t)\omega_2^2) \le \beta < \infty$ для любых ω_1, ω_2, $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$. Пусть $L_0^{-1}(t)$ и

$M_0^{-1}(t)-$ полуобратные матрицы для матриц $L(t)$ и $M(t)$. Для асимптотической стабилизации решения уравнения (4.1) к тривиальному необходимо и достаточно существование матрицы $D(t) \in S_1$, $\Lambda(D(t) \le -\alpha$, $\alpha > \beta$, для которой выполняются равенства

$$L(t)L_0^{-1}(t)D(t) = D(t); \quad D(t)M_0^{-1}(t)M(t) = D(t).$$

Тогда матрица $K(t) = L_0^{-1}(t)D(t)M_0^{-1}(t)$ реализует асимптотическую стабилизацию решения уравнения (4.1) к тривиальному.

В разделе 2 было показано, что аннулирующие левые и правые матрицы к матрице C имеют вид

$$\tilde{C}_l^{-1} = I - CC_0^{-1}, \quad \tilde{C}_r^{-1} = I - C_0^{-1}C,$$

где $I-$ единичная матрица.

Для $n \times m$-матриц левые и правые аннулирующие матрицы $\tilde{C}_l^{-1}$ и $\tilde{C}_r^{-1}$ имеют вид $\tilde{C}_l^{-1} = I_n - CC_0^{-1}$ и $\tilde{C}_r^{-1} = I_m - C_0^{-1}C$. Здесь I_n- $n \times n$-единичная матрица.

Докажем необходимость условий теоремы 4.1.

Умножая уравнение $L(t)K(t)M(t) = D(t)$ на $\tilde{L}_l^{-1}$, имеем:

$$L(t)L_0^{-1}(t)D(t) = D(t). \tag{4.9}$$

Умножая уравнение $L(t)K(t)M(t) = D(t)$ на $\tilde{M}_r^{-1}$, имеем:

$$D(t) = D(t)M_0^{-1}(t)M(t). \tag{4.10}$$

Необходимость условий теоремы 4.1 доказана.

Проверим достаточность условий теоремы 4.1.

Предположим, что выполнены условия (4.9) и (4.10). Из этих условий следует, что матрица $K(t) = L_0^{-1}D(t)M_0^{-1}$ является решением уравнения $L(t)K(t)M(t) = D(t)$. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть оператор $\mathrm{Re}(-\mathrm{A(t)}\omega_1^2 - \mathrm{B(t)}\omega_1\omega_2 - \mathrm{C(t)}\omega_2^2) \le$ $\le \beta < \infty$ для любых ω_1, ω_2 $(-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty)$. Пусть $L_0^{-1}(t)$ и $M_0^{-1}(t)-$ полуобратные матрицы для матриц L и M. Для асимптотической стабилизации решения уравнения (4.1) к тривиальному решению необходимо и достаточно существование матрицы $D \in S_2$, $\sigma(\mathrm{Re}D) \le -\alpha$, $\alpha < \beta$, для которой выполняются следующие равенства:

$$L(t)L_0^{-1}(t)D(t) = D(t); \quad D(t)M_0^{-1}(t)M(t) = D(t).$$

Тогда матрица $K(t) = L_0^{-1}(t)D(t)M_0^{-1}(t)$ осуществляет асимптотическую стабилизацию решения системы уравнений (4.1) к тривиальному решению.

5. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем

Р. Брокеттом [117] была сформулирована проблема стабилизации непрерывных систем с помощью нестационарных линейных обратных связей.

Дискретный аналог этой проблемы сформулирован в [72] следующим образом.

Дана тройка матриц A, B, C. При каких условиях существует матрица $K(n)$, такая, что система

$$x(n+1) = Ax(n) + BK(n)Cx(n), \tag{5.1}$$

$x \in R_l$, $n = 0, 1, \ldots$, является асимптотически устойчивой.

В работе [72] в предположении, что существуют матрицы K_j, $j = 1, 2$, такие, что системы

$$x(n+1) = (A + BK_jC)x(n), \quad j = 1, 2,$$

имеют устойчивые линейные многообразия L_j и инвариантные линейные многообразия M_j, удовлетворяющие ряду дополнительных условий, доказано существование периодической матрицы $K(n)$, осуществляющей асимптотическую стабилизацию к нулю решения системы уравнений (5.1).

Ниже предлагается несколько алгоритмов построения матриц $K(n)$ для стабилизации к нулю решения системы уравнений

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n)K(n)C(n)x(n). \tag{5.2}$$

Обозначим через S_1 множество $l \times l$-матриц с постоянными элементами, собственные значения которых лежат внутри окружности радиуса d, $d < 1$. Обозначим через S_2 множество $l \times l$-матриц, s-числа которых по модулю меньше единицы. Через S_3 обозначим множество $l \times l$-матриц $\{B_\beta\}$, таких, что логарифмические нормы матриц $\{\ln B_\beta\}$ $\Lambda(\ln B_\beta) < 0$.

Теорема 5.1. Пусть матрицы $B(n)$ и $C(n)$ обратимы при каждом n, $n = 0, 1, \ldots$, матрица D принадлежит множеству S_1. Тогда существует последовательность матриц $K(n)$, осуществляющая стабилизацию решения системы (5.2) к нулю.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$A(n) + B(n)K(n)C(n) = D. \tag{5.3}$$

Из условий теоремы следует, что существует последовательность матриц $K(n)$, удовлетворяющих уравнению (5.3):
$K(n) = B^{-1}(n)(D - A(n))C^{-1}(n)$.

Так как матрицы $A(n) + B(n)K(n)C(n) = D$, а $D-$ матрица с постоянными элементами и спектром, сосредоточенным внутри единичной окружности с центром в начале координат, то система уравнений (5.2) асимптотически устойчива.

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения.

Теорема 5.2. Пусть матрицы $B(n)$ и $C(n)$ обратимы при каждом n, $n = 0, 1, \dots,$; матрица D принадлежит множеству S_2. Тогда существуют матрицы $K(n)$, $n = 0, 1, \dots,$ осуществляющие стабилизацию решения системы (5.2) к нулю.

Теорема 5.3. Пусть матрицы $B(n)$ и $C(n)$ обратимы при каждом n, $n = 0, 1, \dots,$; матрица D принадлежит множеству S_3. Тогда существуют матрицы $K(n)$, $n = 0, 1, \dots,$ осуществляющие стабилизацию решения системы (5.2) к нулю.

Замечание. В условиях теорем $5.1 - 5.3$ система уравнений (5.2) имеет бесконечное число стабилизирующих последовательностей $K(n)$,
$n = 0, 1, \dots$. Выбор конкретной стабилизирующей последовательности определяется дополнительными ограничениями.

Исследуем асимптотическую устойчивость системы уравнений (5.1) в предположении, что матрицы $B(n)$ и $C(n)$ необратимы. Кроме того, предположим, что матрица $C(n)$ имеет размер $l_1 \times l$, матрица $K(n)-$ $l_2 \times l_1$, а матрица $B(n)-$ $l \times l_2$. Отметить, что l_1 и l_2 могут зависеть от n, но так как это не влияет на дальнейшие рассуждения, то будем считать что l_1 и l_2 постоянны.

Обозначим через $(B_0(n))^{-1}$ полуобратную матрицу для матрицы $B(n)$. Каждой матрице $B(n)$ размера $l_1 \times l$ можно поставить в соответствие ее левые и правые аннулирующие матрицы

$$\tilde{B}_l^{-1} = I_l - B(n)(B_0(n))^{-1}, \quad \tilde{B}_r^{-1} = I_{l_1} - (B_0(n))^{-1}B(n).$$

Здесь I_l и $I_{l_1}-$ единичные матрицы размера $l \times l$, $l_1 \times l_1$ соответственно.

Следующее утверждение описывает необходимые и достаточные условия существования семейств стабилизирующих матриц.

Теорема 5.4. Пусть $(B_0(n))^{-1}$ и $(C_0(n))^{-1}$– полуобратные матрицы для $B(n)$ и $C(n)$. Для того чтобы существовала стабилизация класса S_2, S_3, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность матриц $D(n)$, принадлежащих соответственно классу S_2, S_3, для которой справедливы равенства

$$B(n)(B_0(n))^{-1}D_1(n) = D_1(n);$$

$$D_1(n)(C_0(n))^{-1}C(n) = D_1(n),$$

где $D_1(n) = D(n) - A(n)$.

Тогда матрицы $K(n) = (B_0(n))^{-1}D_1(n)(C_0(n))^{-1}$ осуществляют стабилизацию системы (5.1), приводящую к тривиальному решению.

Доказательство. Для доказательства осуществимости асимптотической стабилизации к нулю системы уравнений (5.1) нужно показать, что существуют такие матрицы $K(n)$ и $D(n)$ ($D(n) \in S_2, S_3$), что

$$A(n) + B(n)K(n)C(n) = D(n).$$

Отметим, что устойчивость в целом системы

$$X(n+1) = DX(n)$$

при $D \in S_1$ является классическим результатом (приведенным в разделе 3 главы 2), а при $D(n) \in S_2, S_3$ соответствующие утверждения следуют из лемм 3.1, 3.2 главы 2 и следствия к последней лемме. Докажем необходимость условий теоремы. Пусть существуют матрицы $K(n)$ и $D(n)$, осуществляющие асимптотическую стабилизацию системы уравнений (5.2). Тогда, умножив уравнение

$$B(n)K(n)C(n) = D_1(n), \tag{5.4}$$

где $K(n) = (B_0(n))^{-1}D_1(n)(C_0(n))^{-1}$ на левую аннулирующую матрицу $\tilde{B}_l^{-1}$, имеем:

$$B(n)(B_0(n))^{-1}D_1(n) = D_1(n).$$

Умножив систему (5.4) на правую аннулирующую матрицу $\tilde{C}_r^{-1}$, имеем:

$$D_1(C_0(n))^{-1}C(n) = D_1(n).$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия:

$$D_1(n) = B(n)(B_0(n))^{-1}D_1(n); D_1(n) = D_1(n)(C_0(n))^{-1}C(n), \qquad (5.5)$$

где $D_1(n) = D(n) - A(n)$.

Нужно показать, что существует матрица $K(n)$, такая, что

$$B(t)K(n)C(n) = D_1(n). \qquad (5.6)$$

Полагая,

$$K(n) = (B_0(n))^{-1}D_1(n)(C_0(n))^{-1}$$

и используя равенства (5.5), превращаем (5.6) в тождество.

Теорема доказана.

Обобщенная проблема Брокетта в случае систем разностных уравнений может быть сформулирована следующим образом.

Дана система линейных разностных уравнений

$$x(n+1) = A(n)x(n) + \sum_{i=1}^{m} B_i(n)K_i(n)C_i(n)x(n), \qquad (5.7)$$

$n = 0, 1, \ldots$, где $A(n)$, $B_i(n)$, $C_i(n)$– данные $l \times l$-матрицы, $x(n) = = (x_1(n), \ldots, x_l(n))$.

Требуется найти набор матриц $K_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляющих стабилизацию к нулю решения системы уравнений (5.7).

Теорема 5.5. Пусть матрицы $B_i(n)$, $C_i(n)$ обратимы при любом i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда существует бесконечное число наборов матриц $K_i(n), i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляющих асимптотическую стабилизацию системы (5.1).

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы $B_i(n)$ и $C_i(n)$ не имеют обратных.

Теорема 5.6. Пусть $(B_{k,0}(n))^{-1}$ и $(C_{k,0}(n))^{-1}$– полуобратные матрицы для $B_k(n)$ и $C_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $n = 0, 1, \ldots$. Для того чтобы существовала стабилизация класса S_2 или S_3, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность матриц $D(n)$ ($D(n) \in S_2$ или S_3) и чисел $\lambda_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $n = 0, 1, \ldots$, $\lambda_j(n) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(n) = 1$, при которых справедливы равенства

$$B_j(n)(B_{j,0}(n))^{-1}D_j(n) = D_j(n);$$

$$D_j(n)(C_{j,0}(n))^{-1}C_j(n) = D_j(n),$$

$j = 1, 2, \ldots, m$, где $D_j(n) = \lambda_j(n)(D(n) - A(n))$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда матрицы $K_j(n) = (B_{j,0}(n))^{-1}D_j(n)(C_{j,0}(n))^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, осуществляют стабилизацию системы уравнений (5.7), приводящую к тривиальному решению.

Доказательство теоремы 5.5. Обозначим через D матрицу, собственные значения которой лежат внутри единичной окружности с центром в начале координат.

Введем набор констант λ_i, таких, что $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Тогда систему (5.7) можно представить в виде

$$x(n+1) = \sum_{j=1}^{m} A_j(n)x(n) + \sum_{j=1}^{m} B_j(n)K_j(n)C_j(n)x(n), \qquad (5.8)$$

где $A_j(n) = \lambda_j A(n)$.

Рассмотрим уравнения

$$A_j(n) + B_j(n)K_j(n)C_j(n) = \lambda_j D, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Очевидно,

$$K_j(n) = (B_j(n))^{-1}(\lambda_j D - A_j(n))(C_j(n))^{-1} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Подставляя значения $K_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, в систему (5.8), приходим к системе уравнений: $x(n+1) = Dx(n)$, асимптотическая устойчивость которой следует из условий, наложенных на спектр матрицы D.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.6 является объединением доказательств теорем 5.4 и 5.5 и поэтому опускается.

6. Проблема Брокетта для нелинейных дискретных систем

Проблему Брокетта для нелинейных дискретных систем можно сформулировать следующим образом.

Даны $l \times l$-матрицы $A(n)$ и $B(n)$ и вектор-столбец $C(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))$. Требуется найти $l \times l$-матрицу $K(n)$, стабилизирующую к нулю решение системы уравнений

$$X(n+1) = A(n)X(n) + B(n)K(n)C(n, X(n)). \qquad (6.1)$$

Здесь $X(n) = (x_1(n), \ldots, x_l(n))$.

Представим элементы $c_i(n, X(n))$, $i = 1, 2, \ldots, l$, вектора-столбца $C(n, X(n)) = (c_1(n, X(n)), \ldots, c_l(n, X(n))$ в виде суммы

$$c_i(n, X(n)) = \sum_{j=1}^{l} {}^*\lambda_{ij} \frac{c_i(n, x_1(n), \ldots, x_l(n))}{x_j(n)} x_j(n), \qquad (6.2)$$

где $\sum_j^*$ означает суммирование по таким значениям j, при которых $x_j(n) \neq \neq 0$, $0 \leq \lambda_{ij}$, $\sum\limits_{j=1}^{l} {}^*\lambda_{ij} = 1$.

Пользуясь представлением (6.2) системе уравнений (6.1) можно поставить в соответствие множество систем линейных уравнений

$$X(n+1) = A(n)X(n) + B(n)K(n)C^*(\{\lambda_{ij}^*\}_1^l, n)X(n), \qquad (6.3)$$

где $C^*(\{\lambda_{ij}^*\}_1^l, n)-$ матрица, принадлежащая множеству матриц $C^*(\{\lambda_{ij}\}_1^l, n)$, элементы которых имеют вид

$$c^*(\{\lambda_{ij}\}_1^l, n) = \begin{cases} \lambda_{ij} \frac{c_i(n, X(n))}{x_j(n)}, \ x_j(n) \neq 0 \\ 0, \ x_j(n) = 0. \end{cases}$$

Теорема 6.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) матрицы $B(n)$ обратимы при каждом n;

2) при каждом n существует такой набор констант $\lambda_{ij}^*(n)$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$, $\lambda_{ij}^*(n) \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{l} {}^*\lambda_{ij}^*(n) = 1$, что матрицы $C^*(\{\lambda_{ij}^*(n)\}_1^l, n)$ обратимы;

3) матрица D, принадлежит одному из множеств S_1, S_2, S_3.

Тогда существует матрица $K(n)$, осуществляющая стабилизацию решения уравнения (6.1) к нулю.

Доказательство. Пусть матрица D принадлежит множеству S_1. Рассмотрим уравнение $(A(n)+B(n)K(n)C^*(\{\lambda_{ij}^*(n)\}, n))X(n) = D$. Из условий теоремы следует, что $K(n) = B(n)^{-1}(D - A(n))(C^*(\{\lambda_{ij}^*(n)\}, n))^{-1}$.

Асимптотическая устойчивость тривиального решения системы уравнений $X(n+1) = DX(n)$ в случае, когда D принадлежит множеству S_1 доказана в разделе 3 главы 2.

Случаи, когда матрицы $C^*(\{\lambda_{ij}^*\}_1^l, n)$ принадлежат множествам S_2, S_3, исследуются аналогично.

Теорема доказана.

Исследуем стабилизацию решений нелинейных дискретных уравнений в более общей ситуации.

Рассмотрим систему уравнений (6.1), которую представим в виде системы уравнений

$$X(n+1) = A(n)X(n) + B(n)K(n)C^*(n, \{\lambda_{ij}^*\}_1^l)X(n),$$

где $\{\lambda_{ij}^*\}_1^l-$ один из возможных наборов $\{\lambda_{ij}\}_1^l$.

Предложим, что матрицы $B(n)$ и $C^*(n, \{\lambda_{ij}^*\}_1^l)$ необратимы. В этой ситуации справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. Пусть матрицы $B(n)$ и $C^*(n, \{\lambda_{ij}^*\}_1^l)$ необратимы; матрица $D(n)$ при каждом n принадлежит одному из множеств S_2, S_3. Тогда для того чтобы существовала стабилизация к нулю решения системы уравнений (6.1), необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность матриц $D(n)$, принадлежащих соответственно классу S_2, S_3, и наборы $\{\lambda_{ij}\}_1^l$, для которых справедливы равенства

$$B(n)(B_0(n))^{-1}D_1(n) = D_1(n);$$

$$D_1(n)(C_0^*(n, \{\lambda_{ij}^*\}_1^l))^{-1}C^*(n, \{\lambda_{ij}^*\}_1^l) = D_1(n),$$

где $D_1(n) = D(n) - A(n)$.

Тогда матрицы

$$K(n) = (B_0(n))^{-1}D_1(n)(C_0^*(n, \{\lambda_{ij}^*\}_1^l))^{-1}$$

осуществляют стабилизацию к нулю решения системы (6.1).

Доказательство теоремы является объединением доказательств теорем 6.1 и 5.2 и поэтому опускается.

Обобщенная проблема Брокетта для систем нелинейных разностных уравнений может быть сформулирована следующим образом.

Дана система нелинейных разностных уравнений

$$x(n+1) = A(n, x(n)) + \sum_{i=1}^{m} B_i(n)K_i(n)C_i(n, x(n)), \tag{6.4}$$

$n = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, m$, где $B_i(n)-$ заданные $l \times l$-матрицы, $A(n, x(n))$, $C_i(n, x(n)), i = 1, 2, \ldots, m, - l$-мерные вектор-столбцы, $x(n) = (x_1(n), \ldots, x_l(n))$, $n = 0, 1, \ldots$.

Пусть $A(n, 0) = 0$, $C_i(n, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Требуется найти последовательность матриц $K_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, осуществляющих асимптотическую стабилизацию решения системы уравнений (6.4) к тривиальному решению.

Представим элементы $a_i(n,x(n))$, $i=1,2,\dots,l$, вектора $A(n,x(n))=(a_1(n,x(n)),\dots,a_l(n,x(n))$ в виде суммы

$$a_i(n,x(n))=\sum_{j=1}^{l}{}^*\alpha_{ij}(n)\frac{a_i(n,x_1(n),\dots,x_l(n))}{x_j(n)}x_j(n), \tag{6.5}$$

где $\sum\limits_j{}^*$ означает суммирование по всем значениям j, при которых $x_j(n)\neq$ $\neq 0$, $\alpha_{ij}(n)\geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{l}{}^*\alpha_{ij}(n)=1$ при всех $i=1,2,\dots,l$.

Аналогично представляем элементы $c_{ij}(n,x(n))$, $i=1,2,\dots,m$, $i,j=$ $=1,2,\dots,l$, вектора-столбца $C_i(n,x(n))=(c_{i1}(n,x(n)),\dots,c_{il}(n,x(n)))$, $i,j=1,2,\dots,l$, в виде суммы

$$c_{ij}(n,x(n))=\sum_{k=1}^{l}{}^*\gamma_{ijk}(n)\frac{c_{ij}(n,x_1(n),\dots,x_l(n))}{x_k(n)}x_k(n), \tag{6.6}$$

где $\gamma_{ijk}(n)\geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{l}{}^*\gamma_{ijk}(n)=1$ при всех $i,j=1,2,\dots,l,n=0,1,\dots$.

Пользуясь представлениями (6.5) и (6.6), системе уравнений (6.4) можно поставить в соответствие множество систем линейных уравнений

$$x(n+1)=$$

$$=A^*(\{\alpha^*_{ij}(n)\}_1^l,n)x(n)+\sum_{i=1}^{l}B_i(n)K_i(n)C_i^*(\{\gamma^*_{ijk}(n)\}_1^l,n)x(n), \tag{6.7}$$

где $A^*(\{\alpha^*_{ij}(n)\}_1^l,n)$ и $C^*(\{\gamma^*_{ijk}(n)\}_1^l,n)-$ матрицы, принадлежащие множествам матриц $A^*(\{\alpha_{ij}(n)\}_1^l,n)$ и $C^*(\{\gamma_{ijk}(n)\}_1^l,n)$, $i=1,2,\dots,m$, элементы которых имеют вид

$$a^*_{ij}(\{\alpha_{ij}(n)\}_1^l,n)=\begin{cases}\alpha_{ij}(n)\frac{a_i(n,x(n))}{x_j(n)},\ x_j(n)\neq 0,\\ \quad 0,\ x_j(n)=0;\end{cases}$$

$$c^*_{ijk}(\{\gamma_{ij}(n)\}_1^l,n)=\begin{cases}\gamma_{ijk}(n)\frac{c_{ij}(n,x(n))}{x_k(n)},\ x_k(n)\neq 0,\\ \quad 0,\ x_k(n)=0.\end{cases}$$

Теорема 6.3. Пусть матрицы $B_i(n)$ и $C_i^*(n,\{\lambda^*_{ijk}(n)\}_1^l)$ необратимы. Тогда для того, чтобы существовала стабилизация к нулю решения системы уравнений (6.4), необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность матриц $D(n)$, принадлежащих соответственно классу S_2,S_3, и наборы $\{\alpha^*_{ij}(n)\}_1^l$ и $\{\lambda^*_{ijk}(n)\}_1^l$, для которых справедливы равенства $D_i(n)(C^*_{0,i}\{\gamma^*_{ijk}(n)\}_1^l),n)^{-1}C_i^*(\{\gamma^*_{ijk}(n)\}_1^l,n)=D_i(n)$,

$B_i(n)(B_{0,i}(n))^{-1}D_i(n) = D_i(n), i = 1, 2 \ldots, m$, где
$D_k(n) = \lambda_k D(n) - \lambda_k A^*(\{\alpha^*_{ij}(n)\}^l_1, n), \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1.$

Тогда матрицы $K_j(n) = (B_{0,j}(n))^{-1}D_j(n)(C^*_0(\{\gamma^*_{ijk}(n)\}^l_1, n))^{-1}$, $j = 1, \ldots, m$, осуществляют стабилизацию к нулю решения системы (6.4).

Доказательство теоремы 6.3 является объединением доказательств теоремы 6.2 и теоремы 5.5 и поэтому опускается.

Г л а в а 5

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

1. Нейронные сети Хопфилда

Предложены критерии устойчивости нейронных сетей Хопфилда с непрерывными и разрывными нелинейностями, функционирование которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Критерии основаны на исследовании знака логарифмической нормы специальным образом построенной матрицы.

1.1. Введение

В течение нескольких последних десятилетий все большее внимание уделяется исследованию нейронных сетей и их применению к решению задач вычислительной математики и моделирования [38], [43]. В связи с этим представляется актуальным исследование устойчивости нейронных сетей. При исследовании устойчивости нейронных сетей можно выделить два отдельных класса сетей: сети с непрерывными нелинейными элементами и сети с разрывными нелинейными элементами.

При рассмотрении нейронных сетей с непрерывными нелинейными элементами можно воспользоваться классическими определениями устойчивости, приведенными в главе 1. При рассмотрении нейронных сетей с разрывными нелинейными элементами нужно воспользоваться определениями устойчивости, введенными при исследовании дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [103].

Напомним, следуя [103], определения решений дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и устойчивости их решений.

Рассмотрим уравнение или систему уравнений в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

где $f(t, x)-$ кусочно-непрерывная функция (или вектор-функция) в области Ω, $x \in R_n$; $M-$ множество меры нуль точек разрыва функции $f(t, x)$.

Каждой точке (t, x) поставим в соответствие множество $F(t, x)$ в n-мерном пространстве. Это множество строится следующим образом. Если в точке (t, x) функция $f(t, x)$ непрерывна, то множество $F(t, x)$ состоит из одной точки, которая совпадает с $f(t, x)$. Если же $(t, x)-$ точка разрыва функции f, то множество $F(t, x)$ задается способом, адекватным рассматриваемой физической задаче. Для нейронных сетей один из таких способов описан в разделе 1.5.

Определение 1.1 [103]. Решением уравнения (1.1) называется решение дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \tag{1.2}$$

т. е. абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, определенная на интервале или отрезке I, для которой почти всюду на I выполняется включение $\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$.

Определение 1.2 [103]. Решение $x = \varphi(t), t_0 \leq t < \infty$, дифференциального включения (1.2) называется устойчивым, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\tilde{x}_0$, что $|\tilde{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, каждое решение $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ при $t_0 \leq t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \epsilon, \qquad t_0 \leq t < \infty.$$

Определение 1.3 [103]. Решение $x = \varphi(t), t_0 \leq t < \infty$, дифференциального включения (1.2) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того, $\lim\limits_{t \to \infty} |\tilde{x}(t) - \varphi(t)| = 0$.

Определение 1.4. Решение $x = \varphi(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, дифференциального включения (1.2) называется устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво при любом начальном значении $x_0 \in R_n$.

В настоящее время наибольшее распространение получили нейронные сети Хопфилда, функционирование которых описывается системами дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - b_i x_i + c_i; \quad v_i = g_i(x_i),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где x_i- текущее состояние i-го нейрона; v_j- текущее состояние j-го входа на i-м нейроне; $a_{ij}-$ коэффициент связи j-го нейрона с i-м; b_i– коэффициент обратной связи, $b_i > 0$; c_i– внешнее воздействие на i-й нейрон; $g_i(x_i)$– нелинейная функция, характеризующая реакцию i-го нейрона на изменение его состояния.

Хопфилдом рассматривались симметричные нелинейные функции $g(x)$ ($g(-x) = -g(x)$), которые могли быть и разрывными: $g(x) = \mathrm{sgnx}$.

Хопфилдом исследована устойчивость этих сетей. Для этого им была введена функция вычислительной энергии

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_iv_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \int\limits_0^{v_i} g^{-1}(\sigma)d\sigma - \sum_{i=1}^{n} c_iv_i.$$

В случае, если матрица $A = \{a_{ij}\}$ симметричная, а функции v_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, непрерывны, Хопфилдом показано [122] (подробное доказательство приведено в [119]), что система (1.1) сходится к одному из устойчивых состояний равновесия, причем каждое такое состояние равновесия является точкой локального минимума функции вычислительной энергии.

Устойчивость нейронных сетей, описываемых уравнениеми вида

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_ix_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_j(x_j), \tag{1.3}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, и уравнениями более общего вида

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_ix_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}g_k(x_k), \tag{1.4}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, вторым методом Ляпунова была исследована в [51] в предположении, что функции $g_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, непрерывны.

В частности, в [51] доказано, что нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво в целом, если коэффициенты $c_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрица отрицательно полуопределена, а функции $\varphi_j(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют условиям:

1) каждая функция $\varphi_j(x_j)$ всюду определена при $-\infty < x_j < \infty$, непрерывна и однозначна.

2) каждая функция $\varphi_j(x_j)$ расположена строго в первом и третьем октантах, причем всюду при $x_j \neq 0$ выполняются неравенства $x_j\varphi_j(x_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

3) $\lim_{|x_j|\to\infty} \int_0^{x_j} \varphi_j(\rho)d\rho = +\infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Устойчивость нейронных сетей с разрывными функциями $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, исследовалась в [32], [87].

В [32] предполагается, что

$$g_i(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, N$, и для обеспечения устойчивости нейронной сети предлагается метод, заключающийся в мажорировании нелинейной части уравнения (1.3) константой и дальнейшим решением дифференциального неравенства.

В [87] вторым методом Ляпунова исследуется устойчивость решений уравнений вида (1.3) с разрывными нелинейными функциями, а также устойчивость скользящих режимов.

Подробный анализ устойчивости нейронных сетей, в том числе нейронных сетей Хопфилда, приведен в книге [119], где рассмотрена устойчивость нейронных сетей при различных функциях активации, причем исследована как устойчивость в целом, так и устойчивость отдельных точек покоя. Основным аппаратом, использованным в [119] являются функции Ляпунова и функции энергии.

В [119] приведена обширная библиография по устойчивости нейронных сетей, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями.

1.2. Постановка задачи

В этом разделе исследуется устойчивость по Ляпунову нейронных сетей, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Отдельно рассматриваются нейронные сети с непрерывными и разрывными параметрами.

Получены критерии асимптотической устойчивости и устойчивость в целом нелинейных нейронных сетей вида (1.5). В случае нелинейных нейронных сетей с непрерывными нелинейностями, асимптотическая устойчивость и устойчивость в целом определяется как асимптотическая устойчивость и устойчивость в целом систем дифференциальных уравнений, описывающих нейронную сеть. В случае нелинейных нейронных сетей с разрывными нелинейностями асимптотическая устойчивость и устойчивость в целом определяются как асимптотическая устойчивость и устойчивость в целом дифференциальных включений.

1.3. Свойства решений модели сети Хопфилда

Наряду с нейронными сетями Хопфилда, описываемыми системой дифференциальных уравнений (1.5), будем рассматривать более общие системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + g_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.7}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Здесь $g_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, -$ непрерывные функции; $g_i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Система уравнений (1.5) представима в виде (1.7), если положить $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j).$

Обозначим через $G(t)$ матрицу, элементами которой являются функции:

$$g^*_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{g_i(x_1(t), \ldots, x_n(t))}{m x_j(t)}, & x_j(t) \neq 0, \\ \lim\limits_{u \to 0} \frac{g_i(x_1(t), \ldots, x_{j-1}(t), u, x_{j+1}(t), \ldots, x_n(t))}{u}, & x_j(t) = 0, \end{array} \right. \tag{1.9}$$

где $m-$ число элементов $x_j(t) \neq 0$ в векторе $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Предполагается, что в последней формуле предел существует.

Возможны и другие способы определения матрицы $G(t)$. Опишем несколько таких способов.

Например, формула (1.9) является частным случаем формулы

$$g^*_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_{ij}(t) \frac{g_i(x_1(t), \ldots, x_n(t))}{x_j(t)}, & x_j(t) \neq 0, \\ \lim\limits_{u \to 0} \frac{g_i(x_1(t), \ldots, x_{j-1}(t), u, x_{j+1}(t), \ldots, x_n(t))}{u}, & x_j(t) = 0, \end{array} \right.$$

где $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \equiv 1, i = 1, 2, \ldots, n$, причем $\lambda_{ij} \geq 0$ и суммирование проводится по тем значениям j, для которых $x_j(t) \neq 0$. В формуле (1.9) предполагается, что $\lambda_{ij} = 1/m, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

В случае, если предел не существует, то матрицу $G(t)$ можно определить иначе. Например, элементы g^*_{lk} матрицы $G(t)$ можно задать формулой

$$g^*_{lk}(t) = \begin{cases} \frac{g_l(0,\ldots,0,x_k(t),\ldots,x_n(t)) - g_l(0,\ldots,0,x_{k+1}(t),\ldots,x_n(t))}{x_k(t)}, \ x_k(t) \neq 0, \\ 0, \ x_k(t) = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

$l, k = 1, \ldots, n$.

Ниже будем считать, что элементы матрицы $G(t)$ даны формулой (1.9).

Введем теперь матрицу $D(t)$ с элементами $d_{kl}(t)$, определяемыми равенствами $d_{kk} = -c_k + g^*_{kk}(t),\ d_{kl} = g^*_{kl}(t)$ при $k \neq l$.

Теорема 1.1 [26]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $d_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $0 \leq t < \infty$;

2) существует такое r $(r > 0)$, что для каждого вектора $x(t) \in R(0, r)$ справедливо неравенство $\Lambda(D(t)) < 0$ ($\Lambda(D(t)) < -\alpha, \alpha > 0$).

Тогда система уравнений (1.7) устойчива (или асимптотически устойчива).

Введем обозначение $\lambda_M \mathrm{Re} D(\tau) = \sup \sigma(\mathrm{Re} D(\tau))$.

Теорема 1.2 [26]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $d_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $0 < t < \infty$;

2) существует такое r $(r > 0)$, что для любого вектора $x(t) \in R(0, r)$ справедливо неравенство $\lambda_M(\mathrm{Re} D(t)) < 0$ ($\lambda_M(\mathrm{Re} D(t)) < -\alpha, \alpha > 0$).

Тогда система уравнений (1.7) устойчива (асимптотически устойчива).

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим через $\varphi(t)$ непрерывную положительную функцию, такую, что для любых как угодно малых ϵ_0 и ϵ_1 выполняются неравенства $\sup\limits_{0 \leq t < \infty} |\varphi(t)| < \epsilon_0$, $\int\limits_0^\infty \varphi(t) dt < \epsilon_1$.

Исследуем поведение траектории задачи Коши (1.7), (1.8) в промежутке времени $t \in [T, T + \Delta T_0]$, где $T-$ произвольный момент времени $(0 \leq T < \infty)$, а величина ΔT_0 будет уточнена ниже.

Перепишем систему уравнений (1.7) следующим образом:

$$\frac{dx_l(t)}{dt} = -c_l x_l + \sum_{k=1}^{n} g^*_{lk}(T) x_k(t) - \sum_{k=1}^{n} g^*_{lk}(T)(x_k(t) - x_k(T)) +$$

$$+g_l(x_1(t),\dots,x_n(t)) - g_l(x_1(T),\dots,x_n(T)), \tag{1.11}$$

$l = 1, 2, \dots, n$.

Система (1.11) в операторной форме имеет вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = D(T)X(t) + F(X(t)), \tag{1.12}$$

где $X(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, $F(X(t)) = (f_1(X(t)),\dots,f_n(X(t)))-$ вектор с компонентами $f_l(X(t)) = g_l(X(t)) - g_l(X(T)) - \sum\limits_{k=1}^{n} g^*_{lk}(T)(x_k(t) - x_k(T))$, $l = 1, 2, \dots, n$.

Решение задачи Коши (1.12), (1.8) при $t \geq T$ имеет вид

$$X(t) = e^{D(T)(t-T)}X(T) + \int\limits_T^t e^{D(T)(t-s)}F(X(s))ds.$$

Переходя к нормам, имеем:

$$\|X(t)\| \leq e^{\Lambda(D(T))(t-T)}\|X(T)\| +$$

$$+\int\limits_T^t e^{\Lambda(D(T))(t-s)}\|F(X(s))\|ds. \tag{1.13}$$

Так как по предположению функции $g_l(x_1(t),\dots,x_n(t))$, $l = 1, 2, \dots, n$, непрерывны, то найдется такое ΔT_0^*, что в промежутке времени $T \leq t \leq$ $\leq T + \Delta T_0^*$

$$\|F(X(t))\| \leq \frac{1}{2}\varphi(t)\|X(t)\|. \tag{1.14}$$

Здесь предполагается, что $\|X(T)\| \neq 0$, так как если $X(T) = 0$, то имеет место устойчивость решения.

Введем функцию

$$\psi(t) = e^{-\Lambda(D(T))t}\|X(t)\|.$$

Тогда из неравенств (1.13) и (1.14) следует, что на сегменте $[T, T+$ $+\,\Delta T_0^*]$ справедливо неравенство

$$\psi(t) \leq \psi(T) + \frac{1}{2}\int\limits_T^t \psi(s)\varphi(s)ds.$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла – Беллмана, приведенным в главе 1, имеем

$$\psi(t) \le \psi(T) e^{\frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(s)ds}.$$

Возвращаясь к нормам, приходим к неравенству:

$$\|X(t)\| \le \exp\{\Lambda(D(T))(t-T) + \frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(s)ds\}\|X(T)\| =$$

$$= \exp\{\int\limits_T^t \Lambda(D(T))d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(\tau)d\tau\}\|X(T)\|. \quad (1.15)$$

Известно, что для любых линейных операторов A и B в банаховом пространстве справедливо неравенство $|\Lambda(A) - \Lambda(B)| \le \|A - B\|$.

Из непрерывности функций $g^*_{kl}(t)$, $k, l = 1, 2, \dots, n$, следует, что элементы матрицы $D(t)$ непрерывны. Следовательно, существует такой сегмент $[T, T + \Delta T_0^{**}]$, что при $t \in [T, T + \Delta T_0^{**}]$

$$\int\limits_T^t |\Lambda(D(\tau)) - \Lambda(D(T))| d\tau \le \frac{1}{2}\int\limits_T^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Пусть $\Delta T_0 = \min(\Delta T_0^*, \Delta T_0^{**})$. Тогда на сегменте $t \in [T, T + \Delta T_0]$ неравенство (1.15) может быть заменено неравенством

$$\|X(t)\| \le \exp\{\int\limits_T^t (\Lambda(D(\tau)) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T)\|. \quad (1.16)$$

Последнее неравенство справедливо на сегменте $[T, T_1]$, где $T_1 = T + \Delta T_0$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что неравенство типа (1.16) справедливо для сегментов $[T_k, T_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$. Здесь имеются две возможности: 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(T_{k+1} - T_k) = \infty$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(T_{k+1} - T_k) < \infty$.

В первом случае неравенство (1.16) справедливо при всех $t \ge T$.

Рассмотрим вторую возможность. Обозначим: $T^* = T_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(T_{k+1} - T_k)$. Из приведенных выше выкладок следует, что неравенство (1.16) справедливо при $t \in [T, T^*)$. Так как функции $\Delta D(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны, то переходя в (1.16) к пределу при $t \to T^*$, убеждаемся, что оно справедливо и при $t = T^*$.

Рассмотрим две возможные теперь ситуации: а) $X(T^*) = 0$; б) $X(T^*) \neq 0$. Если $X(T^*) = 0$, то неравенство (1.16) справедливо при $t \in [T, T^*]$ и, следовательно, при $t \geq T^*$. Если $X(T^*) \neq 0$, то найдется такое значение $T^{**} > T^*$, что, начиная с $t > T^{**}$, неравенство (1.16) нарушается. Повторяя рассуждения, приведшие к неравенству (1.16), убеждаемся, что существует сегмент $[T^{**}, T^{**} + \Delta T^{**}]$, такой, что при $t \in [T^{**}, T^{**} + \Delta T^{**}]$ справедливо неравенство

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_{T^{**}}^{t} (\Lambda(D(\tau)) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T^{**})\| \leq$$

$$\leq \exp\{\int\limits_{T}^{t} (\Lambda(D(\tau)) + \varphi(\tau))d\tau\}\|X(T)\|,$$

т. е. предположение о нарушении неравенства (1.16) при $t = T^{**}$ неверно.

Таким образом, для обеих возможностей доказана при $t \geq T$ справедливость неравенства (1.16).

Полагая в (1.16) $T = 0$, имеем:

$$\|X(t)\| \leq \exp\left(\int\limits_{0}^{t} (\Lambda(D(\tau)) + \varphi(\tau))d\tau\right)\|X_0\|, \tag{1.17}$$

где $X_0 = X(0)$.

Из произвольности $\varphi(t)$ следует, что

$$\|X(t)\| \leq \exp(\int\limits_{0}^{t} \Lambda(D(\tau))d\tau)\|X_0\|. \tag{1.18}$$

Так как функция $\Lambda(D(t))$ неотрицательна, то $\|X(T)\| < \|X(0)\|$.

Устойчивость решения системы (1.7) доказана.

Докажем асимптотическую устойчивость решения системы (1.7).

Из неравенства (1.18) следует, что при $t \geq 0$

$$\|X(t)\| \leq \exp\{\int\limits_{0}^{t} \Lambda(D(\tau))d\tau\}\|X_0\| \leq \exp\{-\alpha t\}\|X_0\|.$$

Асимптотическая устойчивость решения системы уравнений (1.7) доказана.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть в сфере $S(0, \delta)$, где $\delta-$ достаточно малое положительное число, для любой дифференцируемой функции $X(t)$, $\|X(t)\| \leq \delta$, выполняется неравенство $\int\limits_0^t \Lambda(D(\tau))d\tau \leq k$ при всех $t(0 \leq t < \infty)$ $(\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(D(\tau))d\tau = -\alpha, \quad \alpha > 0)$.
Тогда решение системы уравнений (1.7) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство теоремы 1.2 проводится аналогично.

По аналогии с доказательством теоремы 1.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 1.3 [26]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $d_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $0 \leq t < \infty$;

2) для любого вектора $X(t)$ $(0 < \|X(t)\| < \infty)$ справедливо неравенство $\Lambda(D(t)) < -\alpha, \alpha > 0$.

Тогда решение системы уравнений (1.7) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Случаи, когда элементы матрицы $G(t)$ определяются отличными от формулы (1.9) способами, исследуются аналогично.

1.4. Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с непрерывными нелинейностями

Исследуем асимптотическую устойчивость в целом системы уравнений (1.5) в предположении, что функции $g_{ij}(x), i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны и $g_{ij}(0) = 0, i, j = 1, 2, \ldots, n$. При исследовании устойчивости системы (1.5) будут использованы критерии устойчивости, сформулированные в предыдущем разделе. Зафиксируем произвольное значение $T, 0 \leq T < \infty$. При $t \geq T$ систему уравнений (1.5) можно представить в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^*(T)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_j(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.19}$$

$$g_{ij}^*(T) = \begin{cases} g_{ij}(x_j(T))/x_j(T), & x_j(T) \neq 0, \\ \lim\limits_{u\to 0} g_{ij}(u)/u, & x_j(T) = 0; \end{cases} \tag{1.20}$$

$$f_{ij}(t, x_j(t)) = g_{ij}(x_j(t)) - g_{ij}(x_j(T)) - g_{ij}^*(T)(x_j(t) - x_j(T)), \tag{1.21}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Отметим, что возможны и другие способы определения функций $g^*_{ij}(T)$. Например, можно положить

$$g^*_{ij}(T) = \begin{cases} \frac{g_{ij}(x_j(T)) - g_{ij}(0)}{x_j(T)}, & x_j(T) \neq 0, \\ 0, & x_j(T) = 0, \end{cases}$$

$f_{ij}(t, x_j(t)) = g_{ij}(x_j(t)) - g_{ij}(x_j(T)) - g^*_{ij}(T)(x_j(t) - x_j(T))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для определенности будем рассматривать случай, когда функции $g^*_{ij}(t)$ и $f_{ij}(t, x_j(t))$ определяются формулами (1.20) и (1.21).

Обозначим через $G(T)$ матрицу $G(T) = \{g^*_{ij}(T)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, а через $F(t, X(t))-$ вектор $F(t, X(t)) = (F_1(t, X(t)), \ldots, F_n(t, X_n(t)))$, где $F_i(t, X(t)) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_j(t))$.

Тогда систему (1.19) можно представить в операторной форме

$$\frac{dX(t)}{dt} = -CX(t) + G(T)X(t) + F(t, X(t)), \qquad (1.22)$$

где $C = \{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-$ диагональная матрица с элементами на главной диагонали, равными $c_{ii} = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Применяя к системе уравнений (1.22) рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 1.4 [26]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $g^*_{ij}(t)$, $f_{ij}(t, x_j(t))$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $0 \leq \leq t < \infty$;

2) матрица $B(t) = C + G(t)$;

3) существует такое $r (r > 0)$, что для каждого вектора $X(t) \in R(0, r)$ справедливо неравенство $\Lambda(B(t)) < 0$ ($\Lambda(B(t)) < -\alpha, \alpha > 0$).

Тогда система уравнений (1.5) устойчива (асимптотически устойчива).

Теорема 1.5 [26]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $g^*_{ij}(t)$ и $f_{ij}(t, x_j(t))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $0 \leq \leq t < \infty$;

2) матрица $B(t) = C + G(t)$;

3) существует такое $r (r > 0)$, что для каждого вектора $X(t) \in R(0, r)$ справедливо неравенство $\lambda_M(\mathrm{ReB(t)}) < 0$ ($\lambda_M(\mathrm{ReB(t)}) < -\alpha, \alpha > 0$).

Тогда решение системы уравнений (1.5) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Теорема 1.6 [26]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $g^*_{ij}(t)$, $f_{ij}(t, x_j(t))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $0 \leq \leq t < \infty$;

2) матрица $B(t) = C + G(t)$;

3) для любого вектора $X(t)$, $0 < \|X(t)\| < \infty$ справедливо неравенство $\Lambda(B(t)) < -\alpha, \alpha > 0$.

Тогда решение системы уравнений (1.5) устойчиво в целом.

1.5. Устойчивость нейронных сетей с разрывными нелинейностями

В этом разделе исследуется устойчивость нейронных сетей, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями вида (1.5) в предположении, что функции $g_{ij}(x_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны всюду за исключением точек, где они имеют разрыв первого рода.

Обозначим через t^k_{ij} множество точек, в которых функции $g_{ij}(x_j)$ имеют разрывы первого рода, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где $m-$ конечное число. В большинстве рассматриваемых в литературе случаев $m = 1$ и в качестве функции $g(x)$ берется

$$g(x) = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

В этом случае [103] решением системы (1.5) называется абсолютно непрерывная вектор-функция $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, удовлетворяющая включению

$$\frac{dx_i}{dt} \in -c_i x_i + G_i(X(t)),\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.23}$$

при всех значениях $t \in [t_0, \infty)$.

Здесь $G(X(t)) = (G_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, G_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)))$, $G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \sum\limits_{j=1}^{n} G_{ij}(x_j(t))$; функция $G_{ij}(x(t))$ совпадает с функцией $g_{ij}(x(t))$ в точках непрерывности $x(t)$, а в точках разрыва t^k_{ij} является отрезком вертикальной прямой, соединяющей предельные значения $\lim\limits_{t \to t^k_{ij}-0} g_{ij}(x(t))$ и $\lim\limits_{t \to t^k_{ij}+0} g_{ij}(x(t))$.

Исследуем устойчивость включения (1.23).

Зафиксируем произвольное значение T $(0 \le T < \infty)$ и введем следующие обозначения:

$$a_{ij}(T) = \begin{cases} \frac{G_{ij}(x_j(T))}{x_j(T)}, & x_j(T) \neq 0, \\ 0, & x_j(T) = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Обозначим через $B(T)$ матрицу, состоящую из элементов

$$b_{ij}(T) = \begin{cases} -c_i + a_{ij}(T) & j = i, \\ a_{ij}(T) & j \neq i. \end{cases} \tag{1.25}$$

Обозначим через $\Lambda(B(T))$ логарифмическую норму матрицы $B(T)$.

Замечание. Под логарифмической нормой $\Lambda(B(T))$ понимается не одно число, а функция, зависящая от параметров, какими являются значения, принимаемые точками отрезка, расположенного на прямой $t = t_{ij}^k$, соединяющей значения $g_{ij}(x_j(t_{ij}^k + 0))$ и $g_{ij}(x_j(t_{ij}^k - 0))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, в точках разрывов функций $g_{ij}(x_j(t_{ij}^k))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1.7 [26]. Пусть при каждом фиксированном T $(t_0 \le T < < \infty)$ логарифмическая норма $\Lambda(B(T))$ матрицы $B(T)$ отрицательна (или отрицательна и $\Lambda(B(T)) \le -\alpha$, $\alpha > 0$) при всех $t_0 \le T < \infty$. Тогда включение (1.23) устойчиво (или асимптотически устойчиво в целом).

Доказательство. Вначале докажем устойчивость решения системы уравнений (1.5). Пусть $X(t)-$ траектория решения системы уравнений (1.5) при начальном условии $X(t_0)$. Это решение удовлетворяет включению (1.23). Покажем, что при выполнении условий теоремы любая функция $X(t)$, удовлетворяющая включению (1.23) и начальным условиям $X(t_0) \in R(0, r_0)$, остается в сфере $S(0, r_0)$, т. е. $\|X(t)\| \le r_0 = \|X(t_0)\|$ при $t \ge t_0$.

Представим уравнение (1.5) и включение (1.23) соответственно в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(T) x_k(t) + F_i(t), \tag{1.26}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$\frac{dx_i}{dt} \in -c_i x_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(T) x_k(t) + F_i(t), \tag{1.27}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(G_{ik}(x_k(t)) - a_{ik}(T) x_k(t)\right).$$

В уравнении (1.26) под $a_{ik}(T)$ и $G_{ik}(x_k(t))$ понимаются значения, соответствующие данной, исследуемой функции $X(t)$. Так как в точках разрывов эти значения не определены однозначно, то вместо системы уравнений (1.26) приходится рассматривать систему включений (1.27). Поэтому под значениями $a_{ik}(T)$ и $G_{ik}(x_k(t))$ в точках разрывов понимаются значения, которые принадлежат отрезкам прямых, соединяющих предельные значения этих функций в точках разрывов. Связь между этими значениями описана ниже.

Для простоты обозначений предположим, что функции $g_{ik}(x(t))$ имеют только одну точку разрыва. Пусть это будет точка t^*. Зафиксируем в точке t^* произвольное значение $\bar{g}_{ik}(x_k(t^*))$ из множества значений, принадлежащих сегменту $\left[\lim_{t\to t^*-0} g_{ik}(x_k(t)), \quad \lim_{t\to t^*+0} g_{ik}(x_k(t))\right]$. Введем функцию

$$\bar{g}_{ik}(x_k(t)) = \begin{cases} g_{ik}(x_k(t)), & t \neq t^*, \\ \bar{g}_{ik}(x_k(t^*)), & t = t^*. \end{cases} \tag{1.28}$$

Уравнение

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{g}_{ik}(x_k(t)) \tag{1.29}$$

входит во включение (1.27), и оно может быть представлено при $t \geq$ $\geq T (t_0 \leq T < \infty)$ в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + \sum_{k=1}^{n} \bar{g}^*_{ik}(x_k(T)) x_k(t) + \bar{F}_i(t), \tag{1.30}$$

где функции $\bar{g}^*_{ik}(x_k(T))$, $i,k = 1,2,\ldots,n$, и $\bar{F}_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, определяются формулами

$$\bar{g}^*_{ik}(x_k(T)) = \begin{cases} \frac{\bar{g}_{ik}(x_k(T))}{x_k(T)}, & x_k(T) \neq 0, \\ 0, & x_k(T) = 0; \end{cases}$$

$$\bar{F}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} (\bar{g}_{ik}(x_k(t)) - \bar{g}_{ik}(x_k(T)) - \bar{g}^*_{ik}(x_k(T))(x_k(t) - x_k(T))),$$

$i = 1,2,\ldots,n.$

Матрица $\bar{G}^*(t) = \{\bar{g}^*_{ik}(x_k(t))\}$, $i,k = 1,2,\ldots,n$, состоит из функций $\bar{g}^*_{ik}(x_k(t))$, $i,k = 1,2,\ldots,n$. Матрица $\bar{D}^*(t) = \{d_{ik}(t)\}$, $i,k = 1,2,\ldots,n$, составлена из элементов $d_{ik}(t)$, определяемых равенствами $d_{kk}(t) = -c_k +$ $+ \bar{g}^*_{kk}(x_k(t))$, $k = 1,2,\ldots,n$, $d_{kl}(t) = \bar{g}^*_{kl}(x_l(T))$, $k,l = 1,2,\ldots,n$, $k \neq l$.

Так как функции $\bar{F}_i(t)$, $1, 2, \ldots, n$, могут претерпевать разрыв первого рода, то исследование устойчивости нейронных сетей Хопфилда с разрывными нелинейностями проводится сложнее, чем соответствующих сетей с непрерывными нелинейностями.

Предположим сначала, что функции $g_{kl}(x_l)$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, имеют разрывы только при ненулевых значениях аргументов. Тогда существует интервал времени $[t_0, t_0 + \Delta t_0)$, в течение которого функции $F_i(t)$, $1, 2, \ldots, n$, непрерывны.

Пусть T_1 будет первым значением переменной t, при котором хотя бы одна из функций $\bar{F}_i(t)$, $1, 2, \ldots, n$, претерпевает разрыв. Тогда в интервале $[t_0, T_1)$ решение системы уравнений (1.30) (а следовательно, и (1.29)) в операторной форме можно представить в виде

$$X(t) = e^{\bar{D}^*(t_0)(t-t_0)} X(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\bar{D}^*(t_0)(t-s)} \bar{F}(s) ds. \tag{1.31}$$

Переходя в (1.31) к нормам, в промежутке $[t_0, T_1)$ имеем:

$$\|X(t)\| \le e^{\Lambda \bar{D}^*(t_0)(t-t_0)} \|X(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\Lambda \bar{D}^*(t_0)(t-s)} \|\bar{F}(s)\| ds. \tag{1.32}$$

Так как в промежутке $[t_0, T_1)$ вектор-функция $\bar{F}(s)$ непрерывна, то в этом промежутке можно повторить рассуждения, проведенные в разделах 1.3, 1.4. Следовательно, при $t \in (t_0, T_1)$ $\|X(t)\| < \|X(t_0)\|$, причем $\|X(t)\|$ монотонно убывает. Несмотря на то что в точке T_1 функция $\bar{F}(X(s))$ имеет разрыв первого рода, из неравенства (1.32) следует, что неравенство $\|X(t)\| < \|X(t_0)\|$ сохраняется и при $t = T_1$. Следовательно, в сегменте $[t_0, T_1]$ $\|X(t)\| < \|X(t_0)\|$.

Рассмотрим сегмент $[T_1, T_2]$, $T_2 = T_1 + \Delta T$, где величина ΔT будет определена ниже. В этом сегменте решение уравнения (1.30) может быть записано в виде

$$X(t) = e^{\bar{D}^*(T_1)(t-T_1)} X(T_1) + \int\limits_{T_1}^{t} e^{\bar{D}^*(T_1)(t-s)} \bar{F}(s) ds. \tag{1.33}$$

Пусть $\delta = \|X(t_0)\| - \|X(T_1)\|$. Очевидно, $\delta > 0$. Нетрудно видеть, что существует такое ΔT, что интеграл в правой части неравенства (1.33) будет меньше δ при $t \in [T_1, T_1 + \Delta T]$.

Разберем этот случай подробнее. Для определенности будем считать, что разрыв имеет функция $g_{11}(x_1)$ в одной точке x^*. Пусть в момент времени T_1 функция $g_{11}(x_1(t))$ имеет разрыв. Здесь имеются две возможности: 1) в течение всего промежутка времени $[T_1, T_2]$ $x_1(t) = x_1(T_1)$ и, следовательно, при $t \in [T_1, T_2]$ $g_{11}(x_1(t)) = g_{11}(x_1(T_1))$; 2) имеются значение $T_1^* \in [T_1, T_2]$ и, следовательно, сегмент $[T_1^*, T_1^{**}] \in [T_1, T_2]$, в котором $x_1(t) \neq x_1(T_1)$. Тогда в этом сегменте функция $\bar{F}(s)$ непрерывна.

Таким образом, в случае второй возможности в качестве точки T_2 вместо точки $T_2 = T_1 + \Delta T$ можно взять точку T_1^*. Тогда на сегменте $[T_1^*, T_1^{**}]$ функция $\bar{F}(t)$ непрерывна, и мы возвращаемся к разобранному выше случаю.

Осталось рассмотреть случай, когда на сегменте $[T_1, T_2]$ переменная $x_1(t)$ принимает постоянное значение $x^*(x^* = x_1(T_1))$, соответствующее точке разрыва функции g_{11}. Тогда на сегменте $[T_1, T_2]$ полагаем $\bar{g}_{11}(x_1(t)) = \bar{g}_{11}(x^*)$. Следовательно, на сегменте $[T_1, T_2]$ функция $\bar{F}(t)$ непрерывна, и мы снова возвращаемся к разобранному выше случаю.

Таким образом, при сделанном выше предположении относительно того, что функции $g_{kl}(x_l)$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, не имеют разрывов в нуле, траектория вектор-функции $X(t)$ не выходит из сферы $S(0, \|X(t_0)\|)$.

Рассмотрим теперь случай, когда функции $g_{kl}(x_l)$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, могут иметь разрывы при $x_l = 0, l = 1, 2, \ldots, n$.

Предположим, что какое-то число функций (скажем l функций) из множества функций g_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, имеют разрыв первого рода в нуле. Для определенности будем считать, что функции $g_{11}, \ldots, g_{1l}$ имеют разрыв первого рода в нуле. Тогда существует такое δ, что в шаре $R(0, \delta)$ все функции g_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, за исключением функций g_{1v}, $v = 1, 2, \ldots, l$, не имеют точек разрыва. Возьмем начальное приближение $X_0 = X(t_0)$ таким, что $\|X(t_0)\| \leq \delta/2$. Покажем, что любая траектория системы уравнений (1.29), начавшаяся в шаре $R(0, \delta/2)$, не покинет сферы $S(0, \delta)$. Если первые l компонент вектора X_0 отличны от нуля, то имеем рассмотренный ранее случай, когда существует интервал времени $[t_0, T_1]$, в течение которого функция $\bar{F}(t)$ непрерывна. Поэтому будем считать, что начальное значение $X_0 = (0, \ldots, 0, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0)$. Предположим, что траектория системы уравнений (1.29), начавшаяся в точке X_0, покидает сферу $S(0, \delta)$. Так как вектор-функция $X(t)$ решения системы уравнений (1.29) непрерывна, то это происходит в некоторый момент

$T_0, T_0 > t_0$. Исследуем поведение траектории $X(t)$ при $t_0 \leq t < T_0$. Рассмотрим функции $x_j(t)$, $1 \leq j \leq l$, при $t \geq t_0$. Очевидно, что для каждой функции $x_j(t)$, $1 \leq j \leq l$, имеются две возможности: на сегменте $[t_0, T_0]$ найдется хотя бы одна точка, в которой $x_j(t) \neq 0$; $x_j(t) \equiv 0$ во всем сегменте $[t_0, T_0]$. Если найдется точка $T_1 \in [t_0, T_0]$, в которой $x_1(T_1) \neq 0$, то существует сегмент $\Delta_1 \in [t_0, T_0]$, в котором функция $x_1(t)$ знакопостоянна. Если $x_1 \equiv 0$ в $[t_0, T_0]$, то полагаем $\Delta_1 = [t_0, T_0]$.

В сегменте Δ_1 функция $x_2(t)$ или тождественно равна нулю, или существует сегмент Δ_2, в котором она знакопостоянна. Если $x_2 \equiv 0$, то полагаем $\Delta_2 = \Delta_1$.

Продолжая этот процесс, находим сегмент Δ_l, такой, что в нем каждая из функций $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, l$, или тождественно равна нулю, или знакопостоянна. Пусть $\Delta_l = [t_1, T_1]$, $T_1^* = (t_1 + T_1)/2$. Тогда $\|X(T_1^*)\| < \delta$. При исследовании поведения траектории $X(t)$ уравнения (1.29) при $t \geq T_1^*$ точку T_1^* можно взять за начальное приближение. Здесь нужно рассмотреть два случая: а) все функции $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, l$, в сегменте Δ_l знакопостоянны; б) существуют функции (скажем, функция $x_1(t)$), тождественно равные нулю в сегменте Δ_l.

В первом случае на сегменте $[T_1^*, T_1]$ функция $\bar{F}(t)$ непрерывна, что было исследовано ранее.

Во втором случае на сегменте Δ_l функция $x_1(t) \equiv 0$ и ее производная $\frac{dx_1}{dt} \equiv 0$. (Следовательно, при $t \in [T_1^*, T_1]$ первое из уравнений можно вообще не рассматривать.) Так как на сегменте $[T_1^*, T_1]$ функция $x_1(t) \equiv 0$, то функция $\bar{F}(t)$ на этом сегменте непрерывна.

Таким образом, на сегменте $[T_1^*, T_1]$ систему (1.29) можно исследовать как непрерывную, используя рассуждения, приведенные в разделах 1.3, 1.4. Итак, доказано, что $\|X(T_1)\| < \|X(T_1^*)\| < \delta$, и показано, что в случае, если функции $g_{ij}(x_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, имеют разрыв в нуле, траектория $X(t)$ системы уравнений (1.29) не выходит из сферы $S(0, \delta)$, где $\delta-$ как угодно малое положительное число.

Так как $\bar{D}^*(T)-$ произвольно фиксированная матрица из множества матриц $\bar{D}(T)$, то тем самым доказано, что любая траектория, удовлетворяющая начальному условию $X(t_0)$ и включению (1.27), устойчива.

Устойчивость доказана. Асимптотическая устойчивость и устойчивость в целом доказываются аналогично. Теорема доказана.

1.6. Пример

Проиллюстрируем на примере сформулированные в разделах 1.3 – – 1.5 утверждения. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x + \beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(y);$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(y), \tag{1.34}$$

где $g_i(z) = \mathrm{arctg}(2,2z)$, $i = 1,2$; β_i– параметры, $-\infty < \beta_i < \infty$, $i = 1,2$.

Требуется определить область значений параметров (β_1, β_2), в которой теоремы 1.4 и 1.5 гарантируют устойчивость тривиального решения системы уравнений (1.34).

Элементы $\{d_{ij}\}$, $i,j = 1,2$, матрицы D, соответствующей системе (1.35), равны:

$$d_{11} = \begin{cases} -1 + \beta_1 \frac{g_1(x)}{x}, & x \neq 0, \\ -1 + 2,2\beta_1, & x = 0; \end{cases}$$

$$d_{12} = \begin{cases} \beta_2 \frac{g_2(y)}{y}, & y \neq 0, \\ 2,2\beta_2, & y = 0; \end{cases}$$

$$d_{21} = \begin{cases} -\beta_1 \frac{g_1(x)}{x}, & x \neq 0, \\ -2,2\beta_1, & x = 0; \end{cases}$$

$$d_{22} = \begin{cases} -1 + \beta_2 \frac{g_2(y)}{y}, & y \neq 0, \\ -1 + 2,2\beta_2, & y = 0. \end{cases}$$

Так как логарифмическая норма матрицы D в пространствах R_1 и R_2 равна

$$\Lambda(D) = \sup_k \{\mathrm{Re} d_{kk} + \sum_{l \neq k} |d_{kl}|\},$$

то для устойчивости системы уравнений (1.35) достаточно выполнения условий

$$d_{11} + |d_{12}| < 0, \; d_{22} + |d_{21}| < 0.$$

Для асимптотической устойчивости тривиального решения достаточно выполнения условий

$$d_{11} + |d_{12}| < -\alpha, \; d_{22} + |d_{21}| < -\alpha, \tag{1.35}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha > 0$, в некоторой окрестности точки (0,0).

Выполнение условий (1.35) в некоторой окрестности нуля эквивалентно выполнению неравенств

$$-1+2,2\beta_1+2,2|\beta_2|<-\alpha/2,\ -1+2,2\beta_2+2,2|\beta_1|<-\alpha/2. \qquad (1.36)$$

Множество значений параметров (β_1,β_2), составляющих решение системы неравенств (1.36), принадлежит области $\Omega:\Omega=\{\beta_1,\beta_2:\beta_2-\beta_1< < \frac{10}{22}-\frac{10\alpha}{44}, \beta_2-\beta_1>-\frac{10}{22}+\frac{10\alpha}{44}, \beta_1+\beta_2<\frac{10}{22}-\frac{10\alpha}{44}\}$.

Найдем теперь область устойчивости, воспользовавшись утверждениями теоремы 1.5. Для этого найдем собственные значения матрицы ReD в окрестности точки (0,0). Так как спектр матрицы ReD непрерывно зависит от координат x и y в окрестности начала координат, то для асимптотической устойчивости решения системы (1.34) достаточно потребовать, чтобы собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы ReD в точке (0,0) были отрицательными и меньшими $-\alpha$.

Очевидно, в точке (0,0)

$$\mathrm{Re}D=\begin{pmatrix} -1+2,2\beta_1, & 1,1(-\beta_1+\beta_2)\\ 1,1(-\beta_1+\beta_2) & -1+2,2\beta_2 \end{pmatrix}$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$|\mathrm{Re}D-\lambda E|=(-1+2,2\beta_1-\lambda)(-1+2,2\beta_2-\lambda)-1,21(\beta_2-\beta_1)^2=0.$$

Отсюда $\lambda^2-\lambda(-2+2,2\beta_1+2,2\beta_2)-1,21(\beta_2-\beta_1)^2=0$. Введем обозначения $\gamma_1=-2+2,2\beta_1+2,2\beta_2,\ \gamma_2=1,21(\beta_2-\beta_1)^2$.

Очевидно,

$$\lambda_{1,2}=\frac{\gamma_1\pm\sqrt{\gamma_1^2+4\gamma_2}}{2}$$

и, так как $\gamma_2\geq 0$, при любых значениях γ_1 и γ_2 один из корней $\lambda_{1,2}$ неотрицательный. Теорема 4.2 в данном случае неэффективна.

Таким образом, применяя критерии, полученные в данном разделе, можно утверждать, что система (1.34) асимптотически устойчива в начале координат при значениях параметров $(\beta_1,\beta_2)\in\Omega$.

Глава 6

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Введение

Применение математических методов в биологии и экологии восходит к раннему Возрождению. Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в 1202 г. дал анализ популяции кроликов, в результате которого в математику были введены числа Фибоначчи. Более общие математические модели были построены Дж. Борелли в 1680 г.

В 1917 г. Д' Арси Томпсон опубликовал фундаментальную монографию (D'Arcy Wentworth Thompson "On growth and form ". – Cambridge: Cambridge University Press. 1917), которая считается [77, стр. 5] началом создания современной теоретической биологии.

Тем не менее становление математической экологии, как отдельного фундаментального направления в естествознании, обычно связывают с публикацией В. Вольтерра его знаменитой работы [127] о периодических колебаниях численности популяции в стационарной среде. Предложенная В. Вольтерра математическая модель, описывающая динамику двух популяций (хищник-жертва), в которой особи одной популяции (жертвы) являлись пищей для особей второй популяции (хищников), дала объяснение многим, до той поры непонятным, явлениям периодических изменений численности обеих популяций. Эти изменения нельзя было объяснить никакими внешними факторами. Например, периодическое изменение отношения числа нехищных рыб к числу хищных, которые отмечается во всех морях и которое нельзя объяснить внешними факторами, было объяснено с помощью модели Вольтерра.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – численность жертв и хищников, соответственно.

Пусть a и m – коэффициенты естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно.

Пусть $v = v(x)$ – количество (или биомасса) жертв, потребленных одним хищником за единицу времени, причем каждая часть, полученная с этой массой энергии, расходуется хищником на воспроизводство, а остальное тратится на поддержание жизнедеятельности.

Тогда уравнение системы хищник-жертва можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = ax - V(x)y;$$

$$\frac{dy}{dt} = y(kV(x) - m). \tag{1.1}$$

При малых значениях x можно считать $V(x) = \beta x$. В результате получаем классическую модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = ax - \beta xy;$$

$$\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my. \tag{1.2}$$

В. Вольтерра показал [35], что система (1.2) имеет решение вида

$$\left(\frac{e^x}{X}\right)^m \left(\frac{e^y}{Y}\right)^a = C > 0, \tag{1.3}$$

где $X = x/x^*$, $Y = y/y^*$; $x^* = m/k\beta$, $y^* = a/\beta$ – стационарные точки системы (1.2). Модели Вольтерра имеют большой недостаток – негрубость (т. е. при сколь угодно малых возмущениях фазовых координат решение переходит от одного цикла к другому). Этого недостатка лишена колмогоровская модель [61] системы хищник-жертва

$$\frac{dx}{dt} = a(x)x - V(x)y;$$

$$\frac{dy}{dt} = K(x)y. \tag{1.4}$$

В отличие от модели Вольтерра, в модели Колмогорова не делается никаких ограничений относительно вида функций $a(x)$, $V(x)$, $K(x)$.

В общем случае экологические модели сообществ n видов описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_i}{dt} = F_i(N_1, \ldots, N_n, t), \tag{1.5}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, причем имеющие биологический смысл решения принадлежат положительному ортанту n-мерного евклидова пространства

$$p^n = \{N : N_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Частным случаем систем (1.5) являются вольтерровские модели

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(\alpha_i - \sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}N_j\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

В. Вольтерра показал, что решение системы (1.6) имеет вид

$$\left(\frac{e^{N_1}}{N_1^{q_1}}\right)^{a_1}\left(\frac{e^{N_2}}{N_2^{q_2}}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{e^{N_n}}{N_n^{q_n}}\right)^{a_n} = C > 0, \tag{1.7}$$

где $q = (q_1, \ldots, q_n)$ – стационарное нетривиальное решение системы (1.6.). Исходя из решения (1.7), Вольтерра были получены критерии устойчивости системы (1.6).

Динамика популяций, поколения которых можно считать непересекающимися, описывается системами нелинейных разностных уравнений

$$N_{m+1}^{i} = F_i(N_m^1, \ldots, N_m^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Большое число публикаций [35], [61], [77], [95], [96] посвящено устойчивости моделей Колмогорова (1.4) и общей модели (1.5). Во всех этих исследованиях предполагается, что функции, входящие в правые части уравнений (1.4), (1.5), заданы в аналитической форме и имеют непрерывные производные, по крайней мере, первого порядка.

Наряду с исследованием устойчивости стационарных и периодических решений большое значение для объяснения экологических, экономических и демографических процессов имеет исследование устойчивости распространения волн по различным ареалам. Под устойчивостью распространения волн по ареалам понимается устойчивость формы волны и ее скорости распространения при различных возмущениях.

Распространение популяционных волн по одномерному ареалу описывается уравнениями в частных производных

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + F(N) \tag{1.8}$$

(модель Колмогорова – Петровского – Пискунова [62]).

Более общие диссипативные структуры описываются системами нелинейных уравнений

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\Delta N_j + G_i(N_1, \ldots, N_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.9}$$

Уравнениями (1.8) и (1.9) описываются не только экологические, но экономические и демографические модели. В частности, уравнение, описывающее модель Хотеллинга – Скеллама [91], является частным случаем системы уравнений (1.8). Аналогичным образом систему уравнений (1.9) можно интерпретировать как модель развития популяции, состоящей из n социальных групп.

Исследованию устойчивости описанных выше математических моделей посвящено большое число публикаций. Как правило, в этих работах рассматривается устойчивость по Ляпунову. Основные результаты, полученные при исследовании динамических моделей экономики, экологии и демографии вторым методом Ляпунова, и подробная библиография приведены в монографиях [91],[95], [96].

Следует отметить, что в большинстве публикаций по исследованию устойчивости математических моделей проводится линеаризация и требуется, чтобы правые части соответствующих уравнений были заданы в аналитической форме.

2. Устойчивость экологических систем

Пусть имеется l популяций, динамика которых описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_i}{dt} = F_i(t, N_1(t), \ldots, N_l(t)),\ i = 1, 2, \ldots, l, \tag{2.1}$$

где N_i – численность особей в i-й популяции, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Из приведенных ниже рассуждений будет очевидно, что аналогичным образом можно исследовать устойчивость популяций, в которых старые поколения оказывают влияние на молодые. Поведение таких популяций описывается дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом.

Частными случаями системы (2.1) будут популяции типа Олли, логистические популяции и др.

Исследование устойчивости будем проводить в пространствах R_n, E_n, где E_n– евклидово пространство.

Пусть в момент времени T_0 система (2.1) имеет решение $N(T_0) = = (N_1(T_0), \ldots, N_l(T_0))$. Пусть $\varphi(t)$– вектор-функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_l(t))$, определенная в некоторой окрестности точки T_0 (функция $\varphi(t)$

может быть определена и на всей временной оси ($0 \le t < \infty$)). Пусть $\varphi(T_0) = N(T_0)$. Исследуем устойчивость системы уравнений (2.1) относительно функции $\varphi(t)$.

Сделаем замену
$$\tilde{N}(t) = N(t) - \varphi(t).$$
Тогда систему (2.1) можно представить в виде
$$\frac{d\tilde{N}(t)}{dt} = \tilde{F}(t, \tilde{N}_1(t), \ldots, \tilde{N}_l(t)) - \tilde{\varphi}(t), \tag{2.2}$$
где $\tilde{F}(t, \tilde{N}_1(t), \ldots, \tilde{N}_l(t)) = F(t, \tilde{N}_1(t) + \varphi_1(t), \ldots, \tilde{N}_l(t) + \varphi_l(t))$,
$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Зафиксируем произвольный элемент $z = (z_1, \ldots, z_l) \in R_l$ и поставим ему в соответствие матрицу $A(t, z) = \{a_{ik}(t, z)\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, l)$, элементы которой равны $a_{ik}(t, z) = \tilde{F}_i(t, z_1, \ldots, z_l)(mz_k)^{-1}$ если $z_k \neq 0$, $a_{ik}(t, z) = d_{ik}(t, z)$, если $z_k = 0$, где $d_{ik}(t, z) = \lim\limits_{z_k \to 0} \tilde{F}_i(t, z_1, \ldots, z_l) z_k^{-1}$, если предел существует, и $d_{ik}(t, z) = 0$, если предел не существует. Через m обозначено число ненулевых элементов вектора z. Пусть $z-$ произвольный элемент R_l, причем m ($1 \le m \le l$) его элементов не равно нулю. Каждому вектору z поставим в соответствие l векторов $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{il})$, $i = 1, 2, \ldots, l$, состоящих из неотрицательных чисел. При этом $\lambda_{ij} = 0$, если $z_j = 0$, а $\sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_{ik} = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, l$. Введем матрицу $C(t, z) = \{c_{ik}(t, z)\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, l)$ с элементами $c_{ik}(t, z) = \lambda_{ik} \tilde{\varphi}_i(t) z_k^{-1}$ при $z_k \neq 0$ и $c_{ik}(t, z) = 0$ при $z_k = 0$.

Систему уравнений (2.2) можно записать в следующем виде:
$$\frac{d\tilde{N}(t)}{dt} = A(T_0, \tilde{N}_0(T_0))\tilde{N}(t) - C(T_0, \tilde{N}_0(T_0))\tilde{N}(t) + G(t, \tilde{N}(t)),$$
где
$$G(t, \tilde{N}(t)) = \tilde{F}(t, \tilde{N}(t)) - \tilde{\varphi}(t) - A(T_0, \tilde{N}_0(T_0))\tilde{N}(t) + C(T_0, \tilde{N}_0(T_0))\tilde{N}(t).$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $F_i(t, N_1, \ldots, N_l)$ и $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, непрерывны;

2) существуют такие векторы λ_i, $(i = 1, 2, \ldots, l)$, что логарифмические нормы матрицы $\Lambda(A(t,z) - C(t,z)) \leq -\alpha$, $\alpha = \text{const} > 0$ при $t \geq T_0$ и при произвольном $z \in R_l$.

Тогда система уравнений (2.1) асимптотически устойчива относительно кривой $\varphi(t)$.

Доказательство. По построению $\tilde{N}(T_0) = 0$. Если при условиях теоремы $\tilde{N}(t) \equiv 0$ при $t \geq T_0$, то теорема справедлива.

Пусть $\tilde{N}(t) \not\equiv 0$. Зафиксируем произвольное достаточно малое $\epsilon(\epsilon > > 0)$ и предположим, что $\|\tilde{N}(t)\| < \epsilon$ при $t \in [T_0, T_1)$ и $\|\tilde{N}(T_1)\| = \epsilon$. Покажем, что при условиях теоремы $\|\tilde{N}(T)\| < \epsilon$ при $t \in [T_1, \infty)$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \|\tilde{N}(t)\| = 0$, т. е. что система (2.1) асимптотически устойчива.

Вначале докажем устойчивость системы (2.1). В операторной форме уравнение (2.2) имеет вид

$$\frac{d\tilde{N}(t)}{dt} = B(T_1, \tilde{N}(T_1))\tilde{N}(t) + G(t, \tilde{N}(t)),$$

где $B(T_1, \tilde{N}(T_1)) = A(T_1, \tilde{N}(T_1)) - C(T_1, \tilde{N}(T_1))$.

Повторяя рассуждения, приведенные в главе 2, можно показать, что при $t \geq T_1$ $\|\tilde{N}(t)\| \leq \epsilon$.

Асимптотическая сходимость решения $N(t)$ системы (2.1) к вектор-функции $\varphi(t)$ доказывается по аналогии с доказательствами, приведенными в главе 2.

Теорема доказана.

Замечание. В автономных системах $\varphi'(t) = 0$.

В качестве примера применения сформулированных в главе 2 критериев рассмотрим общую модель хищник-жертва (модель Колмогорова), о которой уже шла речь выше.

Модель Колмогорова является обобщением модели Вольтерра и имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = a(x)x - V(x)y; \quad \frac{dy}{dt} = K(x)y. \tag{2.3}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)-$ численность жертв и хищников соответственно; трофическая функция $V(x)-$ количество (или биомасса) жертв, потребляемая одним хищником за единицу времени; функции $a(x)$ и $K(x)$ определяют естественный прирост жертв и хищников.

Второе из уравнений системы (2.3) имеет решение

$$y(t) = C \exp\left(\int_0^t K(x(\tau))d\tau\right). \qquad (2.4)$$

Стационарной нетривиальной точкой системы (2.3) является точка (x^*, y^*), где x^*- решение уравнения $K(x^*) = 0$, $y^* = a(x^*)x^*/V(x^*), V(x^*) \neq 0$.

Введем новые переменные: $u_1 = x - x^*$; $u_2 = y - y^*$.

Тогда уравнение (2.4) можно записать в виде

$$u_2(t) = C \exp\left(\int_0^t K(x^* + u_1(\tau))d\tau\right) - y^*.$$

Обозначим через $(u_1(0), u_2(0))$ начальные значения, принимаемые функциями $u_1(t), u_2(t)$. Тогда

$$u_2(t) = (y^* + u_2(0)) \exp\left(\int_0^t K(x^* + u_1(\tau))d\tau\right) - y^*. \qquad (2.5)$$

После проведения замены переменных в первом из уравнений системы (2.3) имеем

$$\frac{du_1}{dt} = a(x^* + u_1)u_1(t) + a(x^* + u_1)x^* - V(x^* + u_1)y^* - V(x^* + u_1)u_2. \quad (2.6)$$

Подставим вместо функции $u_2(t)$ в предыдущую формулу ее значение (2.5), имеем

$$\frac{du_1}{dt} = a(x^* + u_1)u_1(t) + a(x^* + u_1)x^* -$$

$$-V(x^* + u_1)(y^* + u_2(0)) \exp\left(\int_0^t K(x^* + u_1(\tau))d\tau\right). \qquad (2.7)$$

Покажем, что если в достаточно малой окрестности $\Delta = (-h, +h; -h, +h)$ $(h > 0)$ начала координат выполняется условие $(v \neq 0)$

$$b(v) = a(x^* + v) + \frac{a(x^* + v)x^*}{v} - \frac{1}{v}V(x^* + v)(y^* + u_2(0)) \times$$

$$\times \exp(K(x^* + v)t) \leq -\alpha, \alpha > 0,$$

то стационарное решение (x^*, y^*) системы уравнений (2.3) устойчиво.

Пусть $\max(|u_1(0)|, |u_2(0)|) \leq \delta < h$. Покажем, что траектория $(u_1(t), u_2(t))$ решения системы уравнений (2.5), (2.7) не покидает области Δ.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что в момент времени T_0 траектория системы уравнений (2.5), (2.7) покидает область Δ, проходя через точку с координатами $(\alpha, \beta), 0 \neq |\alpha| < h, |\beta| = h$.

Запишем уравнение (2.7) в следующем виде:

$$\frac{du_1}{dt} = a(x^* + \alpha)u_1(t) + \frac{a(x^* + \alpha)}{\alpha}x^*u_1(t) -$$

$$-\frac{V(x^* + \alpha)}{\alpha}(y^* + u_2(0))\{\exp\{K(x^* + \alpha)t\}\}u_1(t) + f(t), \tag{2.8}$$

где

$$f(t) = (a(x^*+u_1(t))-a(x^*+u_1(T_0))u_1(t)+(a(x^*+u_1(t))-a(x^*+u_1(T_0))x^*-$$

$$-\frac{a(x^* + u_1(T_0))}{u_1(T_0)}x^*(u_1(t) - u_1(T_0))-$$

$$-(V(x^* + u_1) - V(x^* + u_1(T_0))(y^* + u_2(0))\exp(\int\limits_0^t K(x^* + u_1(\tau))d\tau)-$$

$$-V(x^*+u_1(T_0))(y^*+u_2(0))(\exp(\int\limits_0^t K(x^*+u_1(\tau))d\tau)-\exp(K(x^*+u_1(T_0))t)-$$

$$-V(x^* + u_1(T_0))(y^* + u_2(0))\exp(K(x^* + u_1(T_0))t) \times \frac{u_1(t) - u_1(T_0)}{u_1(T_0)}.$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид

$$u_1(t) = e^{b(T_0)(t-T_0)}u_1(T_0) + \int\limits_{T_0}^t f(\tau)e^{b(T_0)(t-\tau)}d\tau. \tag{2.9}$$

Из структуры функции $f(t)$ следует, что для любого как угодно малого ϵ $(0 < \epsilon < |b(T_0)|)$ найдется такое $\Delta T(\epsilon)$, что в течение промежутка времени $[T_0, \Delta T(\epsilon)]$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq \epsilon|u_1(t)|$.

Введем функцию $\psi(t) = e^{-b(T_0)t}u_1(t)$. Тогда из уравнения (2.9) следует

$$|\psi(t)| \leq |\psi(T_0)| + \epsilon\int\limits_{T_0}^t |\psi(\tau)|d\tau.$$

Воспользовавшись неравенством Гроноулла – Беллмана, имеем:

$$|\psi(t)| \leq |\psi(T_0)|e^{\epsilon(t-T)}.$$

Следовательно,

$$|u_1(t)| \leq |u_1(T_0)|e^{(b(T_0)+\epsilon)(t-T_0)}.$$

Так как $b(T_0)+\epsilon<0$, в момент времени T_0 траектория $u_1(t)$ не покидает $|u_1(T_0)|$ окрестность нуля.

Рассмотрим теперь случай, когда $u_1(T_0)=0$. Покажем, что в этом случае стационарная точка (x^*,y^*) также будет устойчива.

Для этого достаточно показать, что каждая траектория, начавшаяся в ϵ-окрестности точки x^*,y^* не покидает ее 2ϵ-окрестности. Пусть $|u_2(T_0)|=\epsilon$. Пусть $[T_0,T]-$ промежуток времени, в течение которого $\frac{1}{2}\epsilon \leq |u_2(t)| \leq \frac{3}{2}\epsilon$, $0 \leq |u_1(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Если $T=\infty$, то можно взять произвольное значение T, $T>0$. Покажем, что $|u_1(t)| \leq \epsilon$ и при $t \in [T_0,\infty)$. Пусть T_1, $T_0<T_1,-$ произвольный момент времени. Пусть T_2- момент времени, в который $|u_1(t)|$ достигает своего максимального значения при $T_0 \leq t \leq T_1$. Если таких моментов времени несколько, то T_2 – первый из них. Тогда $\frac{1}{2}\epsilon \leq |u_2(T_2)| \leq \frac{3}{2}\epsilon$, $|u_1(T_2)|>0$. Следовательно, взяв T_2 за начальный момент времени и повторив сделанные выше рассуждения, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2.2. Пусть функции $a(x)$, $V(x)$, $K(x)$ непрерывны и справедливо неравенство $b(v) \leq -\alpha, \alpha>0$. Тогда нетривиальное стационарное решение уравнения (2.3) асимптотически устойчиво.

Исследуем устойчивость нулевого решения в модели Колмогорова.

Пусть $a(0) \neq 0$, $V(0) \neq 0$, $K(0) \neq 0$.

Пусть δ – достаточно малое положительное число.

Пусть на сегменте $[0,\delta]$ функции $a(x)$, $V(x)$, $K(x)$ непрерывны.

Пусть в области $G=\{x : 0<|x| \leq \delta\}$, $a(x)<0$, $|a(x)|>|V(x)|$, $K(x)<0$. Тогда решение системы уравнений (2.3) асимптотически устойчиво.

Справедливость этого утверждения следует из результатов главы 2.

Обобщением модели Колмогорова на популяции, состоящие из n и m различных видов, являются системы уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(x_1,\ldots,x_n)x_k+\sum_{k=1}^{m} V_{ik}(x_1,\ldots,x_n)y_k;$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} K_{jk}(x_1, \ldots, x_n) y_k, \tag{2.10}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Отметим два способа исследования устойчивости решений системы уравнений (2.10).

Во-первых, систему уравнений (2.10) можно рассматривать в пространстве R_{n+m} и применить к ней методы, предложенные в главе 2.

Во-вторых, систему уравнений (2.10) можно рассматривать как две отдельные системы

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} K_{jk}(x_1, \ldots, x_n) y_k, \tag{2.11}$$

$j = 1, 2, \ldots, m$

и

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) x_k + \sum_{k=1}^{m} V_{ik}(x) y_k, \tag{2.12}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть (x^*, y^*), $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)-$ стационарное решение системы уравнений (2.10). Для определенности положим $a(x^*) \neq$ $\neq 0$, $V(x^*) \neq 0$, $K(x^*) \neq 0$, где $a(x^*) = \{a_{ij}(x^*)\} \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $V(x^*) = \{V_{ij}(x^*)\} \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $K(x^*) = \{K_{ij}(x^*)\} \neq 0$, $i, j =$ $= 1, 2, \ldots, m$.

Вначале исследуем устойчивость системы уравнений (2.11). Если в некоторой окрестности неподвижной точки x^* (скажем, в шаре $R(x^*, \delta)$, $\delta > 0$) логарифмическая норма матрицы, определяющей правую часть системы (2.11), отрицательна, то траектория $y(t)$ $(y(t) = y_1(t), \ldots, y_m(t))$ находится в сфере $S(y^*, \delta_1)$, где $\delta_1 = \|y(0)\|_{R_m}$.

Таким образом, в промежутке времени $[0, T]$ $(T > 0)$, в течение которого траектория $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ находится в сфере $S(x^*, \delta)$ пространства R_n, траектория $y(t)$ находится в сфере $S(y^*, \delta_1)$ пространства R_m.

Исследуем устойчивость траектории $x(t)$ уравнения (2.12) в пространстве R_n в течение промежутка времени $[0, T]$. При этом значения y_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, принимают произвольные значения из шара $R(y^*, \delta_1)$.

Метод исследования таких систем подробно описан в главе 2. Поэтому не останавливаемся на его описании и на формулировке теорем.

3. Устойчивость динамики популяций

Исследование устойчивости динамики популяций начнем с исследования устойчивости популяций в модели Хотеллинга. Модель Хотеллинга описывает динамику популяций нелинейным уравнением [91]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(s-p)p + B\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right), \tag{3.1}$$

где $p(t,x)$ – плотность популяции; s – коэффициент плотности популяции, A и B – коэффициенты, представляющие темпы роста и распространения популяции, $x = (x_1, x_2)$.

Для удобства исследования в [91] введены единицы измерения, в которых уравнение (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1-p)p + \Delta p. \tag{3.2}$$

В [91] была исследована устойчивость стационарного решения уравнения (3.2) методом линеаризации. Было показано, что стационарное решение уравнения (3.2) устойчиво при выполнении условия $p^*(x) > 1/2$, где $p^*(x)$ – решение уравнения

$$(1-p)p + \Delta p = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) является частным случаем уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + F(N), \tag{3.4}$$

описывающего распространение популяционной волны $N(t,x)$, $x = (x_1, x_2)$. Исследованию распространения популяционных волн по бесконечным ареалам посвящены многочисленные работы, начиная с классических статей Р. Фишера [118], А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [62]. Подробная библиография, посвященная исследованию модели (3.4), приведена в монографии [95]. В частности, в [95] показано, что при выполнении ряда условий, налагаемых на функцию $F(N)$, модель (3.4) устойчива к малым возмущениям в конечных областях.

Представляет интерес исследование устойчивости более общих моделей поведения популяций, нежели модель (3.1).

В частности, естественно предположить, что коэффициенты A, B, s модели (3.1) зависят от времени и координат. Таким образом, рассмотрим модель динамики популяций, описываемую уравнением:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = A(t,x)(s(t,x) - p(t,x))p(t,x) + B(t,x)\Delta p(t,x), \qquad (3.5)$$

определенным в области R с нулевыми граничными условиями.

Будем исследовать устойчивость стационарного решения $p^*(t,x)$ уравнения (3.5) при малых возмущениях в момент времени $t = t_0 = 0$.

Пусть $u(t,x) = p(t,x) - p^*(t,x)$. Тогда уравнение, описывающее отклонение решения $p(t,x)$ модели (3.5) от состояния $p^*(t,x)$ имеет вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A(t,x)(s(t,x) - u(t,x) - 2p^*(t,x))u(t,x) + B(t,x)\Delta u. \quad (3.6)$$

Вначале исследуем устойчивость линеаризованной модели

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A(t,x)(s(t,x) - 2p^*(t,x))u(t,x) + B(t,x)\Delta u. \qquad (3.7)$$

При этом будем исследовать устойчивость решения уравнения (3.7) и его разностной дискретизации.

Для исследования устойчивости решения уравнения (3.7) умножим, следуя [91], это уравнение на $u(t,x)$ и проинтегрируем по рассматриваемой области пространства. В результате имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_R u^2(t,x)dx = \int\int_R A(t,x)(s(t,x) - 2p^*(t,x))u^2(t,x)dx +$$
$$+ \int\int_R B(t,x)u(t,x)\Delta u(t,x)dx.$$

Воспользуемся интегральной теоремой Остроградского – Гаусса

$$\int\int_R (\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} v)dx + \int\int_R v\Delta u dx = \int_{\partial R} v\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

где $n-$ единичная нормаль к границе $\Gamma = \partial R$ области R.

Положим $v(t,x) = u(t,x)B(t,x)$. Известно, что $\mathrm{grad}(uB) = B\mathrm{grad} u + u\mathrm{grad} B$. Так как на границе области функция $u(t,x)$ равна нулю, поверхностный интеграл в правой части предыдущего равенства равен нулю. Следовательно,

$$\int\int_R uB\Delta u dx = -\int\int_R B(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u)dx - \int\int_R u(\mathrm{grad} B, \mathrm{grad} u)dx.$$

Тогда если $B(t,x)$ зависит только от t, то

$$\iint\limits_R uB\Delta u dx = -B(t)\iint\limits_R (\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)dx,$$

а если $B(t,x) = B(t)u^m(t,x)$, то

$$\iint\limits_R uB\Delta u dx = -(m+1)B(t)\iint\limits_R u^m(t,x)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)dx.$$

В результате приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_R u^2(t,x)dx = \iint\limits_R A(t,x)(s(t,x)-2p^*(t,x))u^2(t,x)dx-$$
$$-B(t)\iint\limits_R (\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)dx \tag{3.8}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_R u^2(t,x)dx = \iint\limits_R A(t,x)(s(t,x)-2p^*(t,x))u^2(t,x)dx-$$
$$-(m+1)B(t)\iint\limits_R u^m(t,x)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)dx \tag{3.8$'$}$$

Так как уравнения (3.8) и (3.8$'$) исследуются одинаково, то остановимся на первом из них.

Исследуем уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2(t,x)}{\partial t} = A(t,x)(s(t,x)-2p^*(t,x))u^2(t,x)-B(t)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u), \tag{3.9}$$

в котором x считаем параметром.

Очевидно, если $u^*(t,x)$ является решением уравнения (3.9) при $x \in R$, то эта же функция является решением уравнения (3.8).

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2(t,x)}{\partial t} = A(t,x)(s(t,x)-2p^*(t,x))u^2(t,x).$$

Очевидно,

$$u^2(t,x) = C(x)e^{2\int_{t_0}^t A(\tau,x)(s(\tau,x)-2p^*(\tau,x))d\tau},$$

где $C(x)-$ произвольный параметр.

Применим метод вариации по параметру.

Будем искать частное решение в виде

$$u_p^2(t,x) = C(t,x)e^{2\int_{t_0}^{t} A(\tau,x)(s(\tau,x)-2p^*(\tau,x))d\tau}. \quad (3.10)$$

Тогда, подставляя (3.10) в уравнение (3.9), имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial C(t,x)}{\partial t}e^{\psi(t,x)} + C(t,x)A(t,x)(s(t,x)-2p^*(t,x))e^{\psi(t,x)} =$$

$$= A(t,x)(s(t,x)-2p^*(t,x))(t,x)e^{\psi(t,x)} - B(t)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u),$$

где

$$\psi(t,x) = 2\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau,x)(s(\tau,x)-2p^*(\tau,x))d\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial C(t,x)}{\partial t} = -2e^{-\psi(t,x)}B(t)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)$$

и

$$C(t,x) = -2\int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)e^{-\psi(\tau,x)}d\tau.$$

Подставляя $C(t,x)$ в выражение (3.10), получаем:

$$u^2(t,x) = u^2(0,x)e^{\psi(t,x)} - 2\int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)e^{\psi(t,x)-\psi(\tau,x)}d\tau. \quad (3.11)$$

Если $B(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, то $u^2(t,x) \leq u^2(0,x)e^{\psi(t,x)}$.

Интегрирование равенства (3.11) дает

$$\int\int\limits_R u^2(t,x)dx = \int\int\limits_R e^{\psi(t,x)}u^2(0,x)dx -$$

$$-2\int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)e^{\psi(t,x)-\psi(\tau,x)}\int\int\limits_R(\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}u)dxd\tau. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что если функция $B(t) \geq 0$, то

$$\int\int\limits_R u^2(t,x)dx \leq \int\int\limits_R e^{\psi(t,x)}u^2(0,x)dx.$$

Таким образом, если

$$\psi(t,x) = 2\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau,x)(s(\tau,x) - 2p^*(\tau,x))d\tau \le K$$

при всех $t_0 \le t < \infty$, то решение $p^*(t,x)$ устойчиво.

Кроме того, если $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi(t,x)}{t-t_0} = -\alpha$, $\alpha > 0$ при всех $x \in R$, то решение $p^*(t,x)$ асимптотически устойчиво.

Полученные утверждения можно подытожить в виде следующего утверждения.

Теорема 3.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $B(t,x)$ имеет вид $B(t)$ или $B(t)u^m(t,x)$, где $B(t) \ge 0$, а m − четное число;

2) $\psi(t,x) = 2\int\limits_0^t A(\tau,x)(s(\tau,x) - 2p^*(\tau,x))d\tau \le K, \quad x \in R,\ K = \text{const}$, ($\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t,x)/t = -\alpha, \quad \alpha > 0$ при всех $x \in R$.)

Тогда решение $p^*(t,x)$ уравнения (3.5) устойчиво (асимптотически устойчиво) в равномерной метрике и в метрике пространства $L_2(R)$.

Следствие. В монографии [91] отмечалось, что в результате компьютерного моделирования было установлено, что уравнение (3.1) имеет устойчивые непериодические решения, устойчивость которых не следует из развитой в [91] теории. Теорема 3.1 дает достаточные условия существования устойчивых периодических и непериодических решений уравнения (3.5).

При доказательстве теоремы 3.1 было сделано предположение о том, что функция $B(t,x)$ или не зависит от пространственных переменных, или представима в виде $B(t,x) = B(t)u^m(t,x)$, где m − четное число.

Для исследования устойчивости решения уравнения (3.5) в общем случае воспользуемся разностной аппроксимацией правой части этого уравнения. Этот подход к исследованию устойчивости экологических и экономических моделей представляется естественным, так как при их компьютерной реализации, как правило, приходится использовать разностные методы. Пусть устойчивость уравнения (3.7) исследуется в конечной области D, ограниченной кусочно-гладкой границей Γ. Покроем область D прямоугольной сеткой с шагом h по обеим переменным. Для простоты обозначений будем считать область D квадратом. Из дальнейших выкладок будет очевидно, что все полученные утверждения легко переносятся на произвольные кусочно-гладкие области. Обозначим через x_{kl},

$k, l = 0, 1, \ldots, N$, узлы сетки. Обозначим значения функции $u(t, x_1, x_2)$ в узлах x_{kl} сетки через $u_{kl}(t)$, $k, l = 0, 1, \ldots, N$. Будем аппроксимировать оператор Лапласа при $(x_1, x_2) = x_{kl}$ пятиточечной разностной схемой

$$\bar{\Delta} u_{kl}(t) = \frac{u_{k-1,l}(t) - 2u_{kl}(t) + u_{k+1,l}(t)}{h^2} + \frac{u_{k,l-1}(t) - 2u_{kl}(t) + u_{k,l+1}(t)}{h^2}.$$

В результате уравнение (3.5) аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{kl}(t)}{dt} = A(t, x_{kl})(s(t, x_{kl}) - u_{kl}(t) - 2p^*(t, x_{kl}))u_{kl}(t) +$$
$$+ B(t, x_{kl})h^{-2}(u_{k,l-1}(t) + u_{k,l+1}(t) + u_{k-1,l}(t) +$$
$$+ u_{k+1,l}(t) - 4u_{kl}(t)), \tag{3.13}$$

$k, l = 1, 2, \ldots, N-1$.

Для исследования устойчивости решения системы уравнений (3.13) воспользуемся методом, описанным во второй главе. Согласно этому методу для исследования устойчивости решения системы уравнений (3.13) в промежутке времени $[T, T + \Delta T]$, где ΔT достаточно малое число, представим систему уравнений (3.13) в виде

$$\frac{du_{kl}(t)}{dt} = A(T, x_{kl})(s(T, x_{kl}) - u_{kl}(T) - 2p^*(T, x_{kl}))u_{kl}(t) +$$
$$+ \frac{B(T, x_{kl})}{h^2}[u_{k,l-1}(t) + u_{k,l+1}(t) + u_{k-1,l}(t) + u_{k+1,l}(t) - 4u_{kl}(t)] +$$
$$+ g(t, T, u), \tag{3.14}$$

где

$$g(t, T, u) = [A(t, x_{kl})(s(t, x_{kl}) - u_{kl}(t) - 2p^*(t, x_{kl})) -$$
$$- A(T, x_{kl})(s(T, x_{kl}) - u_{kl}(T) - 2p^*(T, x_{kl}))]u_{kl}(t) -$$
$$- 4(B(t, x_{kl}) - B(T, x_{kl}))h^{-2}u_{kl}(t) +$$
$$+ (B(t, x_{kl}) - B(T, x_{kl}))h^{-2}(u_{k,l-1}(t) + u_{k,l+1}(t) + u_{k-1,l}(t) + u_{k+1,l}(t)).$$

Перенумеруем в каком-нибудь порядке узлы x_{kl}, $k, l = 1, 2, \ldots, N-1$. В качестве одного из способов нумерации можно использовать следующий. Узлу с номером (k, l) соответствует номер $m = (k-1)(N-1) + l$, $k, l = 1, 2, \ldots, N-1$. Обозначим через n число $n = (N-1)^2$.

При этой перенумеровке узел x_{kl}, $k, l = 1, 2, \ldots, N-1$ обозначим через w_m, $m = (k-1)(N-1)+l$.

Тогда систему уравнений (3.14) можно записать в виде

$$\frac{du_k(t)}{dt} = d_{kk}(T)u_k(t) + d_{k,k-1}(T)u_{k-1}(t) + d_{k,k+1}(T)u_{k+1}(t)+$$

$$+d_{k,k-N+1}(T)u_{k-N+1}(t) + d_{k,k+N-1}(T)u_{k+N-1}(t) + g_k(t,T,u), \qquad (3.15)$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Здесь $d_{kk}(T) = A(T, w_k)(s(T, w_k) - u_k(T) - 2p^*(T, w_k)) - 4B(T, w_k)h^{-2}$, $d_{k,k+N-1} = d_{k,k-N+1} = d_{k,k-1} = d_{k,k+1} = B(T, w_k)h^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$.

При остальных сочетаниях (k, l) $d_{kl} = 0$.

Функции $g_k(t, T, u)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в явном виде не выписываются, так как они очевидны.

В операторной форме система (3.15) записывается в виде уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = D(T)u(t) + G(t, T, u), \qquad (3.16)$$

где $G(t, T, u) = (g_1(t, T, u), \ldots, g_n(t, T, u))$.

Систему уравнений (3.16) будем исследовать в пространстве R_n.

Обозначим через $\Lambda(D(T))$ логарифмическую норму оператора $D(T)$. Как следует из результатов, приведенных во второй главе, устойчивость системы (3.16) зависит от логарифмической нормы $\Lambda(D(t))$. Пусть логарифмическая норма $\Lambda(D(T)) < 0$. Тогда найдется такое достаточно малое ϵ, $(\epsilon > 0)$, что $\Lambda(D(T)) + \epsilon < 0$, и такой промежуток времени ΔT, что в интервале $[T, T + \Delta T]$ $\|u(t)\| < e^{\Lambda(D(T))+\epsilon}\|u(T_0)\|$.

Таким образом, если при всех t $(0 \leq t < \infty)$ $\Lambda(D(T)) < 0$ $(\Lambda(D(T)) < < -\alpha, \quad \alpha > 0)$, то система уравнений (3.16) устойчива (асимптотически устойчива).

Определим какие условия следует наложить на коэффициенты уравнения (3.6) для устойчивости (асимптотической устойчивости) решения.

Как следует из результатов главы 2 для устойчивости (асимптотической устойчивости) решения системы уравнений (3.6) достаточно, чтобы логарифмическая норма матрицы $D(t)$ была отрицательной (меньше α, $\alpha < 0$) при всех значениях t, $0 \leq t < \infty$.

Таким образом, для того чтобы решение системы уравнений (3.6) было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы при любом T $(0 \leq T < \infty)$ (или начиная с некоторого фиксированного значения T_0 : $T_0 \leq T < \infty$) и при всех w_k, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$,

$$A(T, w_k)(s(T, w_k) - u_k(T) - 2p^*(T, w_k)) \leq -\alpha, \quad \alpha > 0,$$
$$B(T, w_k) \geq 0. \tag{3.17}$$

Условие (3.17) выполняется, если начальное приближение по норме меньше $\alpha/(2\beta(T, \omega_k)) \quad \beta(T, \omega_k) = \max(1, A(T, \omega_k))$ и если при всех $0 \leq$ $\leq T < \infty$ и $1 \leq k \leq n$ справедливы неравенства

$$A(T, w_k)(s(T, w_k) - 2p^*(T, w_k)) < -3\alpha/2, \quad \alpha > 0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в главе 2, можно показать, что система (3.6) будет асимптотически устойчива, если выполняются условия

$$\int_0^t A(\tau, w_k)(s(\tau, w_k) - 2p^*(\tau, w_k))d\tau \leq -3\alpha/2$$

и $B(t, w_k) \geq 0$ при всех k, $1 \leq k \leq n$.

Отметим, что если исследуется линеаризованная система (3.7), то для устойчивости ее решения достаточно выполнения условий

$$\int_0^t A(\tau, w_k)(s(\tau, w_k) - 2p^*(\tau, w_k))d\tau \leq S,$$

$B(t, w_k) \geq 0$, $S = \mathrm{const}$, при всех k, $1 \leq k \leq n$, $0 \leq t < \infty$, а для асимптотической устойчивости достаточно выполнения условий

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(\tau, w_k)(s(\tau, w_k) - 2p^*(\tau, w_k))d\tau \leq -\alpha, \quad \alpha > 0,$$

$B(t, w_k) \geq 0$ при всех k, $1 \leq k \leq \infty$, $0 \leq t < \infty$.

Исследуем устойчивость решения системы уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = f_k(u_1, \ldots, u_l, \Delta u_1, \ldots, \Delta u_l), \quad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{3.18}$$

На функции $f_k(v_1, \ldots, v_{2l})$ наложим условие $f_k(0, \ldots, 0) \equiv 0$, $k =$ $= 1, 2, \ldots, l$. Кроме того, для простоты обозначений наложим дополнительное условие

$$f_k(v_1, \ldots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \ldots, v_{2l}) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2l. \tag{3.19}$$

На первый взгляд, это достаточно жесткое условие, однако оно может быть значительно ослаблено. Предположим, что функции $f_k(v_1, \ldots, v_{2l})$ можно представить в виде

$$f_k(v_1, \ldots, v_{2l}) = \sum_{j=1}^{2l} f_{kj}^1(v_j) + \sum_{j=2}^{2l} f_{kj}^2(v_1, v_j) + \cdots + f_k^{2l}(v_1, \ldots, v_{2l}) \quad (3.20)$$

таким образом, чтобы дополнительное условие было выполнимо для каждой функции в правой части равенства (3.20). Тогда, как будет видно из дальнейших выкладок, все утверждения, полученные при выполнении условий (3.19), сохраняются и при выполнении условий (3.20). Так как выкладки более прозрачны при выполнении условий (3.19), то ими в дальнейшем ограничимся.

Будем также считать, что существуют пределы

$$\lim_{v_j \to 0} f_k(v_1, \ldots, v_{2l})/v_j = f_{kj}(v_1, \ldots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \ldots, v_{2l}).$$

Аппроксимируем правую часть системы уравнений (3.18) разностной схемой.

Введем в области D, в которой рассматривается система уравнений (3.18), сетку узлов x_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots, N$, которая была описана выше. Значение функции $u_k(t, x)$ в узле x_{ij} будем обозначать символом $u_{ij}^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, l$, $i, j = 0, 1, \ldots, N$.

Оператор Лапласа будем аппроксимировать пятиточечной разностной схемой. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u_{ij}^k(t)}{\partial t} = f_k\left(u_{ij}^1(t), \ldots, u_{ij}^l(t);\right.$$
$$\frac{u_{i-1,j}^1(t) + u_{i+1,j}^1(t) + u_{i,j-1}^1(t) + u_{i,j+1}^1(t) - 4u_{ij}^1(t)}{h^2};$$
$$\left. \ldots; \frac{u_{i-1,j}^l(t) + u_{i+1,j}^l(t) + u_{i,j-1}^l(t) + u_{i,j+1}^l(t) - 4u_{ij}^l(t)}{h^2}\right), \quad (3.21)$$

$i, j = 1, 2, \ldots, N-1$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

Перенумеруем функции $u_{ij}^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, l$, $i, j = 1, 2, \ldots, N-1$, сквозной номерацией, взяв в качестве номера для функции $u_{ij}^k(t)$ число $m = (k-1)(N-1)^2 + (i-1)(N-1) + j$. Общее число функций u_{ij}^k $k = 1, 2, \ldots, l$, $i, j = 1, 2, \ldots, N-1$, равно $n = l(N-1)^2$.

Исследуем поведение системы уравнений (3.21) в некотором интервале времени $[T, T+\Delta T]$. Для этого преобразуем систему уравнений (3.21) следующим образом:

$$\frac{\partial u_{ij}^k(t)}{\partial t} = a_{ij}^{k1}(T)u_{ij}^1(t) + +a_{ij}^{k2}(T)u_{ij}^2(t) + \cdots +$$
$$+a_{ij}^{kl}(T)u_{ij}^l(t) + b_{ij}^{k1}(T)\bar{\Delta}u_{ij}^1(t) + \cdots + b_{ij}^{kl}(T)\bar{\Delta}u_{ij}^l(t) +$$
$$+g_k(t,T,u), \tag{3.22}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, N-1, k = 1, 2, \ldots, l$, где $\bar{\Delta}_{ij}(t)-$ пятиточечный разностный оператор, определенный в точке x_{ij},

$$a_{ij}^{kv}(T) =$$
$$= \begin{cases} \frac{f_k(u_{ij}^1(T),\ldots,u_{ij}^l(T),\bar{\Delta}u_{ij}^1(T),\ldots,\bar{\Delta}u_{ij}^l(T))}{mu_{ij}^v(T)}, & u_{ij}^v(T) \neq 0, \\ \lim\limits_{w\to 0} \frac{f_k(u_{ij}^1(T),\ldots,u_{ij}^{v-1}(T),w,u_{ij}^{v+1}(T),\ldots,u_{ij}^l(T),\bar{\Delta}u_{ij}^1(T),\ldots,\bar{\Delta}u_{ij}^l(T))}{w}, \\ u_{ij}^v(T) = 0; \end{cases}$$

$$b_{ij}^{kv}(T) =$$
$$= \begin{cases} \frac{f_k(u_{ij}^1(T),\ldots,u_{ij}^l(T),\bar{\Delta}u_{ij}^1(T),\ldots,\bar{\Delta}u_{ij}^l(T))}{m\bar{\Delta}u_{ij}^v(T)}, \bar{\Delta}u_{ij}^v(T) \neq 0, \\ \lim\limits_{w\to 0} \frac{f_k(u_{ij}^1(T),\ldots,u_{ij}^l(T),\bar{\Delta}u_{ij}^1(T),\ldots,\bar{\Delta}u_{ij}^{v-1}(T),w,\bar{\Delta}u_{ij}^{v+1}(T),\ldots,\bar{\Delta}u_{ij}^l(T))}{w}, \\ \bar{\Delta}u_{ij}^v(T) = 0, \end{cases}$$

$g_k(t,T,u) = f_k(u_{ij}^1(t), \ldots, u_{ij}^l(t), \bar{\Delta}u_{ij}^1(t), \ldots, \bar{\Delta}u_{ij}^l(t))-$
$-f_k(u_{ij}^1(T), \ldots, u_{ij}^l(T), \bar{\Delta}u_{ij}^1(T), \ldots, \bar{\Delta}u_{ij}^l(T)) + \sum\limits_{v=1}^{l} a_{ij}^{kv}(T)(u_{ij}^v(t) - u_{ij}^v(T))+$
$+\sum\limits_{v=1}^{l} b_{ij}^{kv}(T)(\bar{\Delta}u_{ij}^v(t)) - \bar{\Delta}u_{ij}^v(T))$, $m-$ число отличных от нуля элементов вектора $(u_{ij}^1(T), \ldots, u_{ij}^l(T), \bar{\Delta}u_{ij}^1(T), \ldots, \bar{\Delta}u_{ij}^l(T))$.

Воспользовавшись введенной выше сквозной номерацией функций $u_{ij}^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, l$, $i, j = 1, 2, \ldots, N-1$, систему уравнений (3.22) можно представить в операторной форме в виде уравнения:

$$\frac{du}{dt} = Du + G(u), \tag{3.23}$$

где $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $D = \{d_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,
$G(u) = (G_1(u), \ldots, G_n(u))$.

Элементы матрицы D и вектора $G(u)$ легко могут быть выписаны в общем виде, однако это не делается из-за громоздкости в записи получаемых выражений.

Так как функции, являющиеся компонентами вектора $G(u)$, непрерывны при $t \in [T, T+\Delta T]$ и при $t \to T$ стремятся к нулю, то о поведении траектории системы уравнений (3.23) в промежутке времени $[T, T+\Delta T]$ можно судить по знаку логарифмической нормы матрицы $D(T)$. Повторяя доказательства теорем, приведенных в главе 2, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3.2. Пусть функции $f_i(v_i, \dots, v_{2l})$, $i = 1, 2, \dots, l$, непрерывны и выполнены условия (3.19). Тогда если для любой непрерывной вектор-функции $U(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$, расположенной в шаре $R(0, \delta)$ достаточно малого радиуса δ, логарифмическая норма матрицы $\Lambda(D(t)) < 0$ $(\Lambda(D(t)) < -\alpha, \quad \alpha > 0)$, то тривиальное решение системы уравнений (3.21) устойчиво (асимптотически устойчиво).

4. Устойчивость диссипативных структур

Рассмотрим диссипативную структуру, поведение которой описывается системой нелинейных уравнений

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{l} d_{ij} \Delta N_j + G_i(N_1, \dots, N_l), \tag{4.1}$$

$i = 1, 2, \dots, l$,
где $G_i(0, \dots, 0) = 0$, $G_i(N_1^*, \dots, N_l^*) = 0$, $N^* = (N_1^*, \dots, N_l^*)-$ однородное по пространству стационарное решение уравнения (4.1),

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}.$$

Введем функцию $u = (u_1, \dots, u_l)$, где $u_j = N_j - N_j^*$. Тогда уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{l} d_{ij} \Delta u_j + \tilde{G}_i(u_1, \dots, u_l), \quad i = 1, 2, \dots, l, \tag{4.2}$$

где $\tilde{G}_i(u_1, \dots, u_l) = G_i(u_1 + N_1^*, \dots, u_l + N_l^*) - G_i(N_1^*, \dots, N_l^*)$,
$i = 1, 2, \dots, l$.

Исследуем устойчивость нулевого решения уравнения (4.2) при начальных возмущениях

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{4.3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_l)$.

Исследование проведем в банаховом пространстве X вектор-функций $g = (g_1(x) \cdots g_l(x))$ с нормой

$$\|g\| = \max_{i=1,2,\ldots,l} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g_i(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

При каждом фиксированном значении t норма вектор-функции $u(t, x)$ определяется формулой

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1,2,\ldots,l} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_i(t, x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Вначале рассмотрим систему уравнений, полученную линеаризацией системы уравнений (4.2):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{l} \left(d_{ij}(t) \Delta u_j + a_{ij}(t) u_j \right). \tag{4.4}$$

Здесь мы не останавливаемся на описании линеаризации систем нелинейных уравнений, так как различные виды проведения линеаризации были описаны в главе 2.

Систему уравнений (4.4) будем исследовать при начальных значениях

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{4.5}$$

Применим к задаче Коши (4.4) $-$ (4.5) преобразование Фурье по пространственным переменным (прямое и обратное преобразование Фурье будем обозначать символами F и F^{-1} соответственно).

В результате приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial U_i(\omega, t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{l} \left(d_{ij}(t) \omega_j^2 - a_{ij}(t) \right) U_j(\omega, t), \tag{4.6}$$

$i = 1, 2, \ldots, l,$

$$U(\omega, 0) = U_0(\omega), \qquad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l). \tag{4.7}$$

Введем матрицу

$$A(\omega,t)=\begin{pmatrix} -d_{11}(t)\omega_1^2+a_{11}(t) & \cdots & -d_{1l}(t)\omega_l^2+a_{1l}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -d_{l1}(t)\omega_1^2+a_{l1}(t) & \cdots & -d_{ll}(t)\omega_l^2+a_{ll}(t), \end{pmatrix},$$

где $-\infty<\omega_i<\infty$, $i=1,2,\ldots,l$.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия:

1) функции $d_{ij}(t), a_{ij}(t), i,j=1,2,\ldots,l$, непрерывны при $t\geq 0$;

2) при любых $t\geq 0$, ω_i $(-\infty<\omega_i<\infty)$, $i=1,2,\ldots,l$, логарифмическая норма матрицы $A(\omega,t)$ отрицательна ($\Lambda A(\omega,t)<-\alpha,\alpha>0$). Тогда тривиальное решение системы уравнений (4.4) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Вернемся к исследованию устойчивости нелинейных уравнений (4.1). Будем считать, что существуют коэффициенты a_{ij}, при которых выполняется неравенство

$$\|\tilde{G}^*(u)\|\leq\beta\|u\|, \tag{4.8}$$

где $\tilde{G}_i(u)=\sum\limits_{j=1}^{l}a_{ij}u_j+\tilde{G}_i^*(u)$, $i=1,2,\ldots,l$.

Применим к системе уравнений (4.2) преобразование Фурье по пространственным переменным. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U_i(\omega,t)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{l}d_{ij}(t)\omega_j^2-a_{ij}(t)U_j(\omega,t)+F(G(u)),\qquad i=1,2,\ldots,l.$$

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия:

1) функции $d_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\ldots,l$, непрерывны при $t\geq 0$;

2) справедливо неравенство (4.8);

3) при любых t,ω $(t\geq 0,-\infty<\omega_i<\infty,i=1,2,\ldots,l)$ логарифмическая норма матрицы

$$A(\omega,t)=\begin{pmatrix} -d_{11}(t)\omega_1^2+a_{11}(t) & \cdots & -d_{1l}(t)\omega_l^2+a_{1l}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -d_{l1}(t)\omega_1^2+a_{l1}(t) & \cdots & -d_{ll}(t)\omega_l^2+a_{ll}(t) \end{pmatrix}$$

$\Lambda(A(\omega,t))<-\alpha(\omega),\alpha(\omega)>0$,

4) справедливо неравенство $\beta<\alpha(\omega)$ при всех $\omega\in R_l$.

Тогда стационарное решение системы уравнений (4.1) устойчиво.

Доказательства теорем 4.1 $-$ 4.3 являются повторением рассуждений, приведенных в главе 3 и поэтому опускаются.

Глава 7

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЕМОГРАФИИ

1. Критерии устойчивости роста популяций

В 1921 г. Хотеллинг [123] предложил модель роста и пространственного распределения человеческих популяций. Позднее, в 1951 г., Скеллам [125] применил эту модель для исследования динамики нечеловеческих популяций.

Модель Хотеллинга – Скеллама описывается уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = A(s - N)N + B\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2}\right), \tag{1.1}$$

где N – численность популяции; A и B – постоянные, представляющие соответственно темпы роста и распространения популяций; s – коэффициент плотности популяций; t – время; (x_1, x_2) – пространственные координаты.

Значительно ранее Скеллама уравнение (1.1) было исследовано в классической работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [62], в которой было доказано (при ряде условий) существование бегущей по ареалу генной волны. Одновременно с [62] задача распространения волны по ареалу была исследована в [118]. Позднее теория распространения волн в системах с диффузией стала одним из основных направлений в теории горения [54].

После появления уравнений Ходжкина – Хаксли биология вновь вернулась к этой тематике. Исследованию распространения волн в биологически активных средах посвящена обширная литература: [56], [77], [91], [95], [96], [102]. Основные результаты и достаточно подробная библиография, посвященная волнам в экологии, экономике и демографии, содержатся в [91], [95].

Для удобства записи, следуя [91], выберем в уравнении (1.1) такие единицы измерений, чтобы коэффициенты в (1.1) стали единичными:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (1 - N)N + \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2}. \tag{1.2}$$

Ниже будем рассматривать более общие уравнения вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F(N) + \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2}. \tag{1.3}$$

Устойчивость решения уравнения (1.2) была исследована в [91]. Метод исследования заключался в проведении линеаризации уравнения (1.2) в окрестности стационарного решения. При этом в [91] отмечается, что метод линеаризации недостаточен при решении многих задач.

Ниже предлагается критерий устойчивости решения уравнения (1.3) без проведения линеаризации.

Замечание. Уравнение, являющееся частным случаем уравнения (1.3), другим методом исследовано в предыдущей главе.

Рассмотрим уравнение (1.3) в области $\{t \geq 0, \ (x_1, x_2) \in G\}$, где G– ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ.

Будем также считать, что популяция $N(t, x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$N(t, x)|_\Gamma = N_0(x). \tag{1.4}$$

Обоснование устойчивости уравнения (1.3) будем проводить в банаховом пространстве функций $g(x_1, x_2)$ с нормой $\|g\| = \left[\int\limits_G\int |g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2\right]^{1/2}$.

При каждом фиксированном значении t норма функции $N(t, x_1, x_2)$ определяется формулой $\|N(t, x_1, x_2)\| = \left[\int\limits_G\int |N(t, x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2\right]^{1/2}$.

Обозначим через $N^*(x)$ стационарное решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничному условию (1.4).

Введем функцию $n(t, x) = N(t, x) - N^*(x)$. Подставляя $N(t, x)$ в (1.3) и (1.4) приходим к уравнению

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 n(t, x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 n(t, x)}{\partial x_2^2} + F_1(n(t, x)), \tag{1.5}$$

которое будем рассматривать при граничном условии

$$n(t, x)|_\Gamma = 0 \tag{1.6}$$

и начальном условии

$$n(0, x) = n_0(x), \quad x \in G. \tag{1.7}$$

Здесь $F_1(n) = F(n(t,x) + N^*(x)) - F(N^*(x))$.

Представим уравнение (1.5) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n + \alpha(n)n, \tag{1.8}$$

где

$$\alpha(n(t,x)) = \begin{cases} \frac{F(n(t,x)+N^*(x))-F(N^*(x))}{n(t,x)}, & n(t,x) \neq 0 \\ 0, & n(t,x) = 0, \end{cases}$$

Δ – оператор Лапласа.

Следуя [91], умножим уравнение (1.8) на $n(t,x)$ и проинтегрируем по области G. В результате получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G\int n^2(t,x)dx_1dx_2 = \int\limits_G\int \alpha(n(t,x))n^2(t,x)dx_1dx_2 +$$

$$+\int\limits_G\int n(t,x)\Delta n(t,x)dx_1dx_2. \tag{1.9}$$

Из формулы Гаусса следует, что

$$\int\limits_G\int n\Delta n(t,x)dx_1dx_2 + \int\limits_G\int (\nabla n)^2 dx_1dx_2 = \int\limits_\Gamma n\frac{\partial n}{\partial v}ds = 0, \tag{1.10}$$

где $\nabla n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}i + \frac{\partial}{\partial x_2}j\right)n$; v – единичная нормаль к контуру Γ. Это следует из того, что на границе области G $n(t,x) = 0$.

Из (1.9), (1.10) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G\int n^2(t,x)dx_1dx_2 = \int\limits_G\int \alpha(n(t,x))n^2(t,x)dx_1dx_2 -$$

$$-\int\limits_G\int (\nabla n)^2 dx_1dx_2. \tag{1.11}$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное как угодно малое число. Предположим, что выполнены условия:

1) $\|n_0(x)\| < \delta$;

2) для любой функции $u(x), \|u(x)\| = \delta$, имеющей частные производные до второго порядка включительно, справедливо неравенство

$$\int\limits_G\int \alpha(u(x))u^2(x)dx_1dx_2 < 0,$$

где

$$\alpha(u(x))=\begin{cases}\frac{F(u(x)+N^*(x))-F(N^*(x))}{u(x)}, & u(x)\neq 0,\\ 0, & u(x)=0.\end{cases}$$

Докажем устойчивость решения задачи (1.5) − (1.7) при выполнении перечисленных выше условий.

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени траектория $n(t,x)$ покидает сферу $S(0,\delta)$ пространства R_2, т. е. $\|n(T,x)\| = \delta$. Предствим при $t \geq T$ правую часть уравнения (1.11) в виде $f_1(t,T) + f_2(t,T)$, где

$$f_1(t,T)=\int\int_G \alpha(n(T,x))n^2(T,x)dx_1dx_2-\int\int_G(\nabla n(t,x))^2dx_1dx_2;$$

$$f_2(t,T)=\int\int_G(\alpha(n(t,x))n^2(t,x)-\alpha(n(T,x))n^2(T,x))dx_1dx_2.$$

Из условия 2) следует, что $f_1(t,T)\leq -\beta<0$.

Из конструкции функции $f_2(t,T)$ следует, что для любого как угодно малого ϵ $(0<\epsilon<\beta)$ найдется такое ΔT, что в сегменте $[T,T+\Delta T]$ $f_1(t,T)+f_2(t,T)<-\beta/2$.

Таким образом, из уравнения (1.11) следует, что

$$\int\int_G n^2(t,x)dx_1dx_2=\int\int_G n^2(T,x)dx_1dx_2+2\int_T^t(f_1(t,T)+f_2(t,T))dt\leq$$

$$\leq\int\int_G n^2(T,x)dx_1dx_2-\beta(t-T)<\int\int_G n^2(T,x)dx_1dx_2.$$

Из полученного противоречия следует устойчивость решения уравнения (1.5).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда стационарное решение задачи (1.3) − (1.4) устойчиво.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $\delta>0-$ произвольное как угодно малое число. Пусть выполнены условия:

1) $\|n_0(x)\|<\delta$;

2) для любой функции $u(x)$, $\|u(x)\|=\delta$, имеющей частные производные второго порядка справедливо неравенство

$$\int\int_G\alpha(u(x))u^2(x)dx_1dx_2\leq-\alpha<0.$$

Тогда стационарное решение граничной задачи (1.3) − (1.4) асимптотически устойчиво.

В работе [91] исследовалась устойчивость стационарного решения уравнения (1.3) линеаризацией правой части (1.3) в окрестности стационарного решения в предположении, что функция $F(N)$ равна $F(N) = N(1-$ $-N)$. Условие асимптотической устойчивости в [91] имеет вид $(1 - 2N^*(x_1, x_2)) < 0$ при $(x_1, x_2) \in G$.

Применение теорем 1.1 и 1.2 показывает, что система (1.3) сохраняет устойчивость в случае, если возмущенное решение таково, что

$$\int\int_G (1 - 2N^*(x_1, x_2) - u(t, x_1, x_2))u^2(t, x_1, x_2)dx_1dx_2 < 0. \qquad (1.12)$$

Из условия (1.12) следует, что условие $1 - 2N^*(x_1, x_2) < 0$ достаточно для асимптотической устойчивости решения уравнения (1.5) в предположении, что область G ограничена, а функция $N^*(x_1, x_2)$ – непрерывна.

Рассмотрим теперь случай, когда граничные значения возмущения $n(t, x)$ стационарного решения $N^*(x)$ не являются нулевыми, т. е. вместо граничного условия (1.6) выполняется граничное условие

$$n(t, x)|_\Gamma = n_1(x)|_\Gamma, \qquad (1.13)$$

т. е. имеется постоянное возмущение на границе.

При этом предполагается, что:

1) существует решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2} + F_1(w(x)) = 0 \qquad (1.14)$$

при граничных условиях

$$w(x)|_\Gamma = n_1(x). \qquad (1.15)$$

Обозначим через $w^*(x)$ решение краевой задачи (1.14), (1.15). Введем функцию $m(t, x) = n(t, x) - w^*(x)$. Подставляя эту функцию в уравнение (1.5), имеем:

$$\frac{\partial m(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x_2^2} + F_1(m(t, x) + w^*(x)) - F_1(w^*(x)),$$

т. е. получаем уравнение

$$\frac{\partial m(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x_2^2} + F_2(m(t, x)), \qquad (1.16)$$

где $F_2(m(t,x)) = F(m(t,x)+N^*(x)+w^*(x))-F(N^*(x)+w^*(x))$ с нулевым граничным условием.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теорем 1.1 или 1.2, доказываем устойчивость нового стационарного решения $N^*(x)+$ $+w^*(x)$.

Теоремы 1.1 и 1.2 дают строгое обоснование (без применения линеаризации), описанных в [91] критериев устойчивости одномерной модели Хоттелинга – Скеллама при $F(N) = N(1-N)$.

В [91] отмечено, что при компьютерном моделировании были обнаружены устойчивые стационарные состояния, существование которых не следует из теорем 1.1 и 1.2.

Для того чтобы объяснить эти состояния, вернемся к уравнению (1.11).

Очевидно, функция $n(t,x)$ будет решением уравнения (1.11), если при любом $x = (x_1, x_2)$ она будет решением уравнения

$$\frac{\partial n^2(t,x)}{\partial t} = a(t, n(t,x))n^2(t,x) - (\nabla n(t,x))^2. \tag{1.17}$$

Представим уравнение (1.17) в виде

$$\frac{\partial n^2(t,x)}{\partial t} = a(T, n(t,x))n^2(t,x) - (\nabla n(t,x))^2 + f(t,T,x), \tag{1.18}$$

где $f(t,T,x) = (a(t,n(t,x)) - a(T,n(T,x)))n^2(t,x)$.

Очевидно,

$$n^2(t,x) \le e^{a(T,n(T,x))(t-T)}n^2(T,x)+$$
$$+\int\limits_T^t e^{a(T,n(T,x))(t-s)}(f(s,T,x) - (\nabla n(s,x))^2)ds. \tag{1.19}$$

Из структуры функции $f(s,T,x)$ следует, что для любого как угодно малого $\epsilon(\epsilon > 0)$ найдется такой промежуток времени $[T, T+\Delta T]$, в течение которого

$$|f(t,T,x)| \le \epsilon |n^2(t,x)|. \tag{1.20}$$

Из уравнения (1.19) следует справедливость неравенства

$$0 \le n^2(t,x) \le e^{a(T,n(T,x))(t-T)}n^2(T,x)+$$
$$+\int\limits_T^t e^{a(T,n(T,x))(t-s)}|f(s,T,x)|ds. \tag{1.21}$$

Переходя в неравенстве (1.21) к модулям и воспользовавшись неравенством (1.20), имеем:

$$n^2(t,x) \leq e^{a(T,n(T,x))(t-T)} n^2(T,x) +$$

$$+ \int\limits_T^t e^{a(T,n(T,x))(t-s)} \epsilon n^2(T,x) ds. \tag{1.22}$$

Введем функцию

$$\psi(t) = e^{-a(T,n(T,x))} n^2(t,x).$$

Тогда неравенство (1.22) можно записать в виде

$$\psi(t) \leq \psi(T) + \int\limits_T^t \psi(s) \epsilon ds. \tag{1.23}$$

Применим к (1.23) неравенство Гронуолла – Беллмана. В результате имеем

$$\psi(t) \leq e^{\epsilon(t-T)} \psi(T)$$

и, следовательно,

$$n^2(t,x) \leq e^{(a(T,n(T,x))+\epsilon)(t-T)} n^2(T,x).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по переменной x. В результате имеем

$$\int\int\limits_G n^2(t,x) dx_1 dx_2 \leq \int\int\limits_G e^{(a(T,n(T,x))+\epsilon)(t-T)} n^2(T,x) dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\delta^2} \int\int\limits_G e^{(a(T,n(T,x))+\epsilon)(t-T)} n^2(T,x) dx_1 dx_2 \right) \times$$

$$\times \int\int\limits_G n^2(T,x) dx_1 dx_2, \tag{1.24}$$

где $\delta^2 = \int\int\limits_G n^2(T,x) dx_1 dx_2$.

Из анализа неравенства (1.24) следует, что если функция $a(t, n(t,x))$ отрицательна при всех значениях t и x, то модель устойчива.

2. Устойчивость математических моделей демографии

В работах [58], [59] предложена феноменологическая теория роста населения Земли, согласно которой численность населения Земли, начиная с момента появления первого человека и вплоть до далекого будущего описывается уравнением

$$\frac{dn}{dt} = k\sin^2\frac{n}{k} + \frac{1}{k}, \tag{2.1}$$

где $k = \left(\frac{c}{\tau}\right)^{1/2} = 67\ 000;\quad \tau = 42 \pm 1;\quad c = (186 \pm 1)\cdot 10^9;\quad n = \frac{N}{k}$, где $N\,(t)$ – численность населения Земли в момент $t = \frac{T - T_1}{\tau},\quad T_1 = 2\ 007{\pm}1.$

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$n\,(t') = k\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}^2+1}}\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\mathrm{k}^2+1}}{\mathrm{k}^2}\mathrm{t}'\right), \tag{2.2}$$

где время t' отсчитывается от момента времени t_0, $t_0 = -\pi k/2$, $(T_0 = T_1 - \frac{\pi}{2}k\tau = T_1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{c\tau})$и $n_0 = n\,(t_0) = 0$. Очевидно $T_0 = -4,4\cdot 10^6$ лет. Нетрудно видеть, что функцию $n(t')$можно записать в виде

$$n^*(t) = k\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}^2+1}}\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\mathrm{k}^2+1}}{\mathrm{k}^2}\left(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0}{\tau}\right)\right). \tag{2.3}$$

В работах [58], [59] также отмечается, что решение уравнения (2.1) неустойчиво к флуктуациям в любой момент существования человечества до момента T_1. Это утверждение основано на применении первого метода Ляпунова к уравнению, полученному в результате линеаризации уравнения (2.1).

Представляют значительный интерес исследование устойчивости решения уравнения (2.1) без проведения линеаризации и построение области поглощения уравнения (2.1). Исследованию этих вопросов посвящен данный раздел.

Введем переменную $u\,(t)$, связанную с $n\,(t)$ формулой $n\,(t) = n^*\,(t) + u\,(t)$, где функция $n^*\,(t)$ определена формулой (2.3). Тогда

$$\frac{du}{dt} = k\sin^2\frac{n^*\,(t) + u\,(t)}{k} + \frac{1}{k} - \frac{dn^*\,(t)}{dt} = k\left(\sin^2\frac{n^*\,(t) + u\,(t)}{k} - \sin^2\frac{n^*}{k}\right) =$$

$$= k\sin\frac{u\,(t)}{k}\sin\frac{2n^*\,(t) + u\,(t)}{k}. \tag{2.4}$$

Зафиксируем произвольный момент времени t^* и достаточно малое число Δt, величина которого будет определена ниже.

Представим уравнение (2.4) в виде

$$\frac{du}{dt} = a(u(t^*), n^*(t^*))\, u\,(t) + \varphi\,(t, u(t)\,, n^*\,(t))\,, \tag{2.5}$$

где

$$a(u(t^*), n^*(t)) = \begin{cases} \sin\frac{2n^*(t^*)}{k}, & u\,(t^*) = 0, \\ \frac{k}{u(t^*)}\sin\frac{u(t^*)}{k}\sin\frac{2n^*(t^*)+u(t^*)}{k}, & u\,(t^*) \neq 0, \end{cases}$$

$$\varphi\,(t, u\,(t)\,, n^*\,(t)) = k\sin\frac{u\,(t)}{k}\sin\frac{2n^*\,(t) + u\,(t)}{k} - a(u(t^*), n^*(t))\, u(t).$$

Пусть $u\,(t^*) \neq 0$. Нетрудно видеть, что для любого как угодно малого $\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ найдется такое Δt, что в промежутке времени $[t^*, t^* + \Delta t]$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, u(t), n^*(t))\|_C \leq \varepsilon\,\|u\,(t)\|_C\,. \tag{2.6}$$

К уравнению (2.5) (при условии выполнения неравенства (2.6)) применимы результаты, полученные в главе 2. Из этих результатов следует, что если в момент времени t^*, $\quad a(u(t^*), n^*(t^*)) < 0$, то существует промежуток времени $[t^*, t^* + \Delta t]\,$, в течение которого $|u\,(t)| < |u\,(t^*)|$. Следовательно, если, начиная с некоторого момента t^* $a(u(t), n^*(t)) \leq$ $\leq -\alpha$, $\quad \alpha > 0$, то функция $u\,(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и, следовательно, траектория $n^*\,(t)$ при $t \geq t^0$ устойчива. Напротив, если в момент времени t^* $a(t^*, u(t^*), n^*(t^*)) > 0$, то $|u\,(t)| > |u\,(t^*)|$, а если при $t \geq t^*$ $a(u(t), n^*(t)) > \alpha$, $\quad \alpha > 0$, то решение $u\,(t)$ неустойчиво.

Из выражения $a(u(t), n^*(t))$ следует, что траектория $n^*(t)$ неустойчива при $n^*(t)$, таких, что $n^*(t) < k\pi/2$. Это утверждение совпадает с результатом, полученным в [58] – [59] при исследовании линеаризованного уравнения первым методом Ляпунова. Применение результатов главы 2 позволяет сделать вывод о границах неустойчивости решения уравнения (2.4). В самом деле, если в некоторый момент времени $t^*\,|u\,(t^*)| = M$ и $a(u(t^*), n^*(t^*)) < 0$, то существует такой интервал времени $[t^*, t^* + \Delta t]\,$, в течение которого $|u\,(t)| \leq M$. Поэтому при $|u\,(t)| \leq k\pi$ границы поглощающего множества определяются уравнением

$$\frac{k}{u\,(t)}\sin\frac{u\,(t)}{k}\sin\frac{2n^*\,(t) + u\,(t)}{k} = 0.$$

Отсюда $\frac{2n^*(t)+u(t)}{k} = \pi$ и $u(t) = k\pi - 2n^*(t)$ при $u(t) > 0$. Следовательно, численность населения Земли не может превосходить величины $n(t) = k\pi - n^*(t)$.

Из выражения для функции $a(u(t), n^*(t))$ следует, что решение уравнения (2.1) устойчиво при $\frac{k\pi}{2} < n^*(t) < k\pi$.

Таким образом, определены границы поглощающего множества уравнения (2.1) при $n^*(t) \le k\pi/2$ и доказана устойчивость решения (2.2) уравнения (2.1) при $\frac{k\pi}{2} < n^*(t) < k\pi$.

3. Модели популяций с неперекрывающимися поколениями

Динамика популяций, поколения которых можно считать непересекающимися, описывается уравнениями первого порядка

$$N_{m+1} = N_m(f(N_m)), \tag{3.1}$$

где N_m – численность популяции в момент времени m; $F(N) = Nf(N)$ – функция, характеризующая поведение популяции.

В [95], [96] при исследовании устойчивости решения уравнения (3.1) предполагалось, что функция $F(t)$ является дифференцируемой при всех значениях t $(0 < t < \infty)$.

В данном разделе исследуется устойчивость систем нелинейных разностных уравнений

$$\begin{aligned} N^1_{m+1} &= F_1(N^1_m, \dots, N^l_m); \\ N^2_{m+1} &= F_2(N^1_m, \dots, N^l_m); \\ N^l_{m+1} &= F_l(N^1_m, \dots, N^l_m) \end{aligned} \tag{3.2}$$

с дискретными функциями $F_l(u_1, \dots, u_l)$, $l = 1, 2, \cdots$.

Исследование будем проводить в пространствах R_n и E_n, где E_n – евклидово пространство.

Исследуем вначале устойчивость тривиального решения системы уравнений (3.2).

Обозначим через λ_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, l$, множество вещественных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\lambda_{ij} \ge 0, \qquad i, j = 1, 2, \dots, l; \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.4}$$

Представим функцию $F_i(N_m^1, \dots, N_m^l)$ в виде

$$F_i(N_m^1, \dots, N_m^l) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{ij} a_{ij}(m) N_m^j, \qquad i = 1, 2, \dots, l,$$

где $a_{ij}(m) = F_i(N_m^1, \dots, N_m^l)/N_m^j$, если $N_m^j \neq 0$, и $a_{ij}(m) = 0$, если $N_m^j = 0$.

Здесь λ_{ij}– наборы чисел, удовлетворяющих условиям (3.3), (3.4), причем если $N_m^j = 0$, то и $\lambda_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Зафиксируем произвольный целочисленный вектор $u = (u^1, \dots, u^l)$. Поставим этому вектору в соответствие набор матриц $A_\lambda(u) = \{a_{ij}(\lambda, u)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, l$, где

$$a_{ij}(\lambda, u) = \begin{cases} \lambda_{ij} F_i(u^1, \dots, u^l)/u^j, & u^j \neq 0, \\ 0, & u^j = 0, \end{cases}$$

λ_{ij}– набор чисел, удовлетворяющих условиям (3.3), (3.4), причем $\lambda_{ij} = 0$, если $u^j = 0$.

Теорема 3.1. Пусть $F_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, l$. Пусть для каждого целочисленного вектора $u = (u^1, \dots, u^l) \in R_l$ найдется такой набор векторов $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{il}), i = 1, \dots, l$, что выполняется неравенство $\|A_\lambda(u)\| < 1$. Тогда тривиальное решение системы уравнений (3.2) устойчиво в целом.

Доказательство. Вначале докажем устойчивость системы уравнений (3.2). Доказательство проведем от противного. Предположим, что система (3.2) неустойчива и в момент времени m покидает сферу $S(0, r)$ с радиусом r, т. е. $\|N_{m+1}\| > r$. Положим $\|N_m\| = r^*$ и $r^* < r$. Из условий теоремы следует, что найдется такой набор векторов $\lambda^* = \{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, что $\|A_\lambda(N_m)\| < 1$. Тогда

$$\|N_{m+1}\| = \|A_\lambda(N_m) N_m\| \leq \|A_\lambda(N_m)\| \|N_m\| < \|N_m\|. \tag{3.5}$$

Из неравенства (3.5) следует, что в момент времени m траектория системы уравнений (3.2) не покидает сферы $S(0, r)$. Устойчивость решения системы (3.2) доказана.

Докажем асимптотическую устойчивость. Из проведенных выше выкладок следует, что

$$\|N_{m+n}\| < \|N_{m+n-1}\| < \dots < \|N_m\|.$$

Так как в каждой сфере $S(0, \|N_m\|)$ содержится только конечное число целочисленных l-мерных векторов, то после конечного числа шагов система (3.2) достигает устойчивого положения равновесия $(0, \dots, 0)$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема справедлива и в случае, когда векторы $(N_m^1, \dots, N_m^l)$ и функции $F_i(N_m^1, \dots, N_m^l)$ не являются целочисленными.

Теорема 3.2. Пусть $F_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, l$. Пусть для любого $u = (u^1, \dots, u^l) \in R_l$ найдется набор векторов λ_i, $i = 1, 2, \dots, l$, такой, что справедливо неравенство $\|A_\lambda(u)\| < 1$. Тогда тривиальное решение системы уравнений (3.2) устойчиво в целом.

Доказательство. В доказательстве нуждается только асимптотическая устойчивость. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что

$$\|N_{m+n}\| < \|N_{m+n-1}\| < \cdots < \|N_0\|,$$

т. е. последовательность норм $\|N_m\|$ образует убывающую ограниченную снизу последовательность. Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \|N_m\| = 0$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что, помимо тривиального, система уравнений (3.2) имеет еще одно состояние равновесия $N^* = (N_*^1, \dots, N_*^l)$. Исследуем устойчивость этого состояния равновесия.

Введем новые переменные $n_m = N_m - N^*$, $m = 0, 1, \cdots$.

Тогда систему уравнений (3.2) можно записать в виде

$$n_{m+1}^1 = F_1(n_m^1 + N^{*1}, \dots, n_m^l + N^{*l}) - N^{*1}, \tag{3.6}$$
$$n_{m+1}^l = F_l(n_m^1 + N^{*1}, \dots, n_m^l + N^{*l}) - N^{*l}.$$

Эту систему можно записать в виде

$$n_{m+1}^j = \bar{F}_j(n_m^1, \dots, n_m^l), \quad j = 1, 2, \dots, l, \tag{3.7}$$

где $\bar{F}_j(n_m^1, \dots, n_m^l) = F_j(n_m^1 + N^{*1}, \dots, n_m^l + N^{*l}) - F_j(N^{*1}, \dots, N^{*l})$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Устойчивость системы уравнений (3.2) относительно вектора N^* эквивалентна устойчивости тривиального решения системы уравнений (3.7). Критерий устойчивости тривиального решения системы уравнений (3.7) сформулирован в теореме 3.1. Таким образом, справедливо следующее утверждение об устойчивости стационарного состояния N^* системы уравнений (3.2). В этом критерии через $\bar{A}_\lambda(u)$ обозначена матрица, построенная по аналогии с матрицей $A_\lambda(u)$, но относительно функции $\bar{F}_j(n_m^1, \ldots, n_m^l)$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Теорема 3.3. Пусть $N^* = (N^{*1}, \ldots, N^{*l})$ – положение равновесия системы уравнений (3.2). Пусть существует сфера $S(0, r)$, такая, что для любого целочисленного вектора $u = (u^1, \ldots, u^l) \in S(0, r)$ найдется такой набор векторов $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{il})$, $i = 1, 2, \ldots, l$, что $\|\bar{A}_\lambda(u)\| < 1$. Тогда положение равновесия N^* системы уравнений (3.2) является асимптотически устойчивым.

Замечание. Если $\|\bar{A}_\lambda(u)\| < 1$ для любого целочисленного вектора $u \in R^l$, то положение равновесия N^* устойчиво в целом.

Заключение

В монографии изложен метод исследования устойчивости решений систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Предложенные критерии устойчивости одновременно охватывают как регулярный, так и всевозможные критические случаи.

Дано применение предложенного метода к исследованию устойчивости нейронных сетей Хопфилда, математических моделей экологии и демографии.

Предложен метод стабилизации динамических систем, описываемых системами линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и разностных уравнений.

Изложенный в книге метод исследования устойчивости по Ляпунову решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных параболического типа может быть распространен и на другие типы уравнений и на другие определения устойчивости.

В частности, на его основе могут быть получены критерии устойчивости решений гиперболических уравнений, подобные критериям, приведенным в главе 3 для параболических уравнений. Он также применим при исследовании технической устойчивости и устойчивости по Лагранжу систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Список литературы

1. Абгарян, К. А. Введение в теорию устойчивости движения на конечном интервале времени / К. А. Абгарян. – М. : Наука, – 1992. – 160 с.

2. Айзерман, М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости "в большом" динамических систем / М. А. Айзерман //Успехи математических наук. – 1949. – Т.4. – № 4. – С. 187–188.

3. Айзерман, М. А. Абсолютная устойчивость регулируемых систем /М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер. – М. : АН СССР, 1963. – 140 с.

4. Андерсон, Б. Устойчивость адаптивных систем / Б. Андерсон, Р. Битмид, К. Джонсон (мл.), П. Кокотович, Р. Кошут, И. Маризл, Л. Прали, Б. Ридл. – М. : Мир, 1989. – 263 с.

5. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд.– М. : Наука, 1971. – 240 с.

6. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1979. – 416 с.

7. Ахромеева, Т. С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1992. – 544 с.

8. Банах, С. Теория линейных операций / С. Банах. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 272 с.

9. Барбашин, Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. – М. : Наука, 1967. – 224 с.

10. Белавин, В. А. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения/ В. А. Белавин, С. П. Капица, С. П. Курдюмов // ЖВМ и МФ. – 1998. – Т.38. – № 6. – С. 885 – 902.

11. Беллман, Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений/ Р. Беллман – М. : ИЛ, 1954. – 254 с.

12. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. А. Кук. – М. : Мир, 1967. – 548 с.

13. Белоцерковский, С. М. Крыло в нестационарном потоке газа / С. М. Белоцерковский, Б. К. Скрипач, В. Г. Табачников. – М. : Наука, 1971. – 767 с.

14. Бобылев, Н.А. Оценки возмущений устойчивости матриц /

Н. А. Бобылев, С. В. Емельянов, С. К. Коровин// Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 4. – С. 15 – 24.

15. Бойков, И. В. Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений / И. В. Бойков // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314. – № 6. – С. 1298 – 1300.

16. Бойков, И. В. Об одном способе построения областей устойчивости систем автоматического регулирования / И. В. Бойков // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – № 2. – С. 20 – 25.

17. Бойков, И. В. Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений с недифференцируемыми правыми частями / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т.29. – № 8. – С. 1453 – 1455.

18. Бойков, И. В. К проблеме Айзермана / И. В. Бойков // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58. – № 3. – С. 52 – 55.

19. Бойков, И. В. Об устойчивости движения в одной системе с последействием / И. В. Бойков // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т.61. – № 3. – С. 398 – 402.

20. Бойков, И. В. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с последействием / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 8. – С. 1134 – 1138.

21. Бойков, И. В. Об определении областей устойчивости систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных/ И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 6. – С. 88 – 96.

22. Бойков, И. В. Об определении областей устойчивости для некоторых классов нелинейных уравнений с распределенными параметрами / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 1. – С. 40 – 49.

23. Бойков, И. В. Устойчивость дискретных моделей популяций/ И. В. Бойков // Синтез и сложность управляющих систем: Материалы XII Междунар. школы-семинара. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2001. – Ч. I. – С. 21 – 26.

24. Бойков, И. В. Критерии устойчивости экологических, экономических и демографических моделей / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – Пенза : ИИЦ ПГУ, 2003 (5). – № 2. – С. 18 – 30.

25. Бойков, И. В. Устойчивость математических моделей демографии / И. В. Бойков // Актуальные проблемы науки и образования. Тр. Междунар. юб. симп. – Пенза : 2003. – С. 8 – 10.

26. Бойков, И. В. К устойчивости нейронных сетей Хопфилда / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 9. – С. 124 – 140.

27. Бойков, И. В. К стабилизационной проблеме Брокетта / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 76–82.

28. Бойков, И. В. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений второго порядка / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 9. – С. 15 – 22.

29. Бойков, И. В. Об одном критерии устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 1. – С. 3 – 10.

30. Бойков, И. В. Устойчивость математических моделей нелинейной экономической динамики / И. В. Бойков, М. А. Викулов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – Пенза : ИИЦ ПГУ, 2005. – № 6. – С. 3 – 15.

31. Бойков, И. В. Критерии устойчивости математических моделей иммунологии / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, А. А. Дмитриева // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: тр. III Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: Пензенский Дом Знаний, 2008. – С. 31 – 36.

32. Борисов, Ю. И. Исследование состояний равновесия в непрерывной модели нейронной сети Хопфилда/ Ю. И. Борисов, Ю. А. Кузьмичев, Х. П. Смолицкий // Известия вузов. Приборостроение. – 1994. – № 3, 4. – С. 5 – 12.

33. Бутковский, А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : Справочное пособие / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.

34. Виноград, Р. Э. Замечание о критическом случае устойчивости особой точки на плоскости / Р. Э. Виноград // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 101. – № 2. – С. 209 – 212.

35. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1975. – 288 с.

36. Воскресенский, Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения / Е. В. Воскресенский. – Саранск : СВМО, 2000. – 300 с.

37. Галиуллин, А. С. Построение систем программного движения / А. С. Галиуллин, И. А. Мухаметзянов, Р. Г. Мухарламов, В. Д. Фурасов. – М. : Наука, 1971. – 240 с.

38. Галушкин, А. И. Теория нейронных сетей/ А. И. Галушкин. – М. : ИПРЖР, 2000. – 416 с.

39. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

40. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1963. – 640 с.

41. Гелиг, А. Х. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов, В. А. Якубович. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

42. Глушков, В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – М. : Наука, 1983. – 350 с.

43. Горбань, А. Н. Нейронные сети на персональном компьютере / А. Н. Горбань, Д. А. Россиев. – Новосибирск: Наука, 1996. – 276 с.

44. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965. – 448 с.

45. Гусев, Ю. М. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов / Ю. М. Гусев, Е. Н. Ефанов, В. Г. Крымский, В. Ю. Рутковский // Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3 – 24.

46. Гусев, Ю. М. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ устойчивости интервальных матриц / Ю. М. Гусев, Е. Н. Ефанов, В. Г. Крымский, В. Ю. Рутковский // Техническая кибернетика. – 1991. – № 2. – С. 3 – 30.

47. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве/ Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.

48. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : Мир, 1962. – 820 с.

49. Джури, Э. И. Робастность дискретных систем / Джури Э.И. // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 5. – С. 3 – 18.

50. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

51. Дудников, Е. Е. Об абсолютной устойчивости одного класса нейросетей с обратными связями / Е. Е. Дудников, Н. В. Рыбашов // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №12. – С. 33 – 40.

52. Жуков, В. П. Полевые методы исследования нелинейных динамических систем / В. П. Жуков. – М. : Наука, 1992. – 138 с.

53. Заде, Л. Теория линейных систем / Л. Заде, Ч. Дезоер. – М. : Наука, 1970. – 703 с.

54. Зельдович, Я. Б. Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. – М. : Наука, 1980. – 478 с.

55. Зубов, В. И. Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение / В. И. Зубов. – М. : Высш. шк., 1973. – 271 с.

56. Иваницкий, Г. Р. Математическая биофизика клетки / Г. Р. Иваницкий, В. И. Кринский, Е. Е. Сельков. – М. : Наука, 1978. – 310 с.

57. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термо-вязко-упругости / А. А. Илюшин, В. Е. Победря. – М. : Наука, 1970.– 280 с.

58. Капица, С. П. Синергетика и прогнозы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий // Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения. – М. : Наука, 1997. – 285 с.

59. Капица, С. П. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерк теории роста человечества / С. П. Капица. –М. : Международная программа образования, 1999. – 240 с.

60. Карпилевич, Ф. И. О характеристических корнях матриц с неотрицательными элементами /Ф. И. Карпилевич // Изв. АН СССР. Сер. математ. – 1951. – Т. 15. – С. 361 – 383.

61. Колмогоров, А. Н. Качественное изучение математических моделей популяций / А. Н. Колмогоров // Проблемы кибернетики: – М. : Наука, 1972. – Вып. 25. – С. 100 – 106.

62. Колмогоров, А. Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов // Бюл. МГУ. Серия А. – 1937. – № 6. – С. 1 – 26.

63. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Наука, 1969. – 312 с.

64. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

65. Красовский, А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем / А. А. Красовский. – М. : Наука, 1963. – 468 с.

66. Красовский, Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений / Н. Н. Красовский // ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 547 – 554.

67. Красовский, Н. Н. Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня / Н. Н. Красовский // Мат. сб. – 1955. – Т. 37. – № 1. – С. 83 – 88.

68. Красовский, Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. – М. : Физматгиз, 1959. – 211 с.

69. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1965. – 204 с.

70. Ла-Салль, Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М. : Мир, 1964. – 168 с.

71. Леонов, Г. А. Стабилизационная проблема Брокетта / Г. А. Леонов // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 5. – С. 190 – 193.

72. Леонов, Г. А. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем уравнений /Г. А. Леонов // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 5. – С. 92–96.

73. Леонов, Г. А. Методы стабилизации линейных управляемых систем / Г. А. Леонов, М. М. Шумафов. – С.-Пб. : Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 2002. – 308 с.

74. Лурье, А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1962. – 216 с.

75. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

76. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 530 с.

77. Марри, Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Дж. Марри. – М. : Мир, 1983. – 397 с.

78. Мартынюк, А. А. Устойчивость движения. Метод интегральных неравенств / А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лила. – Киев : Наукова думка, 1989. – 272 с.

79. Массера, Ж. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Ж. Массера, Ж. Шеффер. – М. : Мир, 1969. – 456 с.

80. Матросов, В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов. – М. : Физматлит, 2001. – 384 с.

81. Митропольский, Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. – Киев : Наукова думка, 1971. – 440 с.

82. Мовчан, А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам / А. А. Мовчан // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24. – Вып. 6. – С. 988 – 1001.

83. Мышкис, А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1972. – 352 с.

84. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

85. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1979. – 256 с.

86. Первозванский, А. А. Квазилогические системы и их устойчивость / А. А. Первозванский // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 5. – С. 135 – 144.

87. Петрякова, Е. А. Нейронные сети Хопфилда с несимметрической матрицей коэффициентов связи между нейронами / Е. А. Петрякова // Приборостроение. – 1994. – Т. 37. – № 3 – 4. – С. 24 – 32.

88. Плисс, В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом / В. А. Плисс. – Л. : Изд-во ЛГУ. – 1958. – 183 с.

89. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.

90. Попов, Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования / Е. П. Попов. – М. : Наука, 1979. – 256 с.

91. Пу, Т. Нелинейная экономическая динамика / Т. Пу. – Ижевск: Издательский дом “Удмурдский университет“, 2000. – 200 с.

92. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 383 с.

93. Резван, В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием / В. Резван. – М. : Наука, – 1983. – 359 с.

94. Румянцев, В. В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных /В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. – М. : Наука, 1987. – 253 с.

95. Свирежев, Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю. М. Свирежев. – М. : Наука, 1987.– 368 с.

96. Свирежев, Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет. – М. : Наука, 1978, 352 с.

97. Сергеев, В. С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых системах с последействием / В. С. Сергеев // ПММ. – 1993. – Т. 57. – Вып. 5. – С. 166 – 174.

98. Сиразетдинов, Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – М. : Наука, 1987. – 232 с.

99. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1974. – 808 с.

100. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 468 с.

101. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : Физматлит, 2005. – 233 с.

102. Уатт, К. Е. Экология и управление природными ресурсами / К. Е. Уатт. – М. : Мир, 1971. – 464 с.

103. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.

104. Харитонов, В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Харитонов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 11.– С. 2086 – 2088.

105. Харитонов, В. Л. Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы / В. Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 5. – С. 42 – 47.

106. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

108. Чезари, Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – М. : Мир, 1964. – 478 с.

109. Четаев, Н. Г. Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. – М. : Наука, 1965. – 207 с.

110. Шестаков, А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами / А. А. Шестаков. – М. : Наука, 1990. – 320 с.

111. Юдин, Д. Б. Линейное программирование / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольдштейн. – М. : Наука, 1969. – 448 с.

112. Эйдельман, С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. – М. : Наука, 1964. – 444 с.

113. Якубович, В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1972. – 720 с.

114. Berbyuk, V. Control and Optimization of Semi-passively Actuated Multibody Systems// Preprints of the NATO Advanced Study Institute on Virtual Nonlinear Multibody Systems, V. 2, Prague, 2002.– P. 33 – 39.

115. Boykov, I. V. An Stabilization Problem for Partial Differential Equations // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. Пенза: Информационо-издательский центр Пенз. гос. ун-та, 2005. С. 3 – 15.

116. Boykov, I. V. Stability of solution of differential equations / I. V. Boykov, A. I. Boykova // Preprints of the NATO Advanced Study Institute on Virtual Nonlinear Multibody Systems, V. 1, Prague, 2002. – P. 33 – 39.

117. Brockett, R. A. Stabilization Problems/ R. A. Brockett // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory, Berlin: Springer, 1999. – P. 75 – 78.

118. Fisher, R. A. The wave of advance of advantageousgenes / R. A. Fisher // Ann. Eugenics. – 1937. – № 7. – P. 355 – 369.

119. Gupta, M. M. Static and Dynamic Neural Networks. From Fundamentals to Advanced Theory / M. M. Gupta, L. Jin, N. Hamma. – NY.: IEEE Press. Wiley Interscience, 2005. – 722 p.

120. Hahn, W. Theorie und Anwendung der Direkten Methode von Ljapunov / W. Hahn. – Berlin: Springer-Verlag, 1959. – 270 p.

121. Heinen, J. A. Sufficient condition for stability of interval matrices / J. A. Heinen // Int. J. Control. – 1984. – V. 39. – № 6. – P. 1323 – 1328.

122. Hopfield, J. J. Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two-State Newrons / J. J. Hopfield // Jbid. – 1984. – V. 81. – P. 3088 – 3092.

123. Hotelling, H. A. Mathematical Theory of Migration / H. A. Hotelling // MA thesis presented at the University of Washington (1921); перепечатаны в 1978 г. в Environment and Planning. – 1978. – V. 10. – P. 1223 – 1239.

124. Michel, A. N. Stability analysis of composit systems / A. N. Michel, D. W. Porther // IEEE Trans. Autom. Control. – 1972. – V. AC-17. – P. 222 – 226.

125. Scellam, J.G. Random Dispersal in Theoretical Populations / J. G. Scellam // Biometrika. 1951. – V. 38. – P. 196 – 218.

126. Turing, A. The chemical basis of morphogenesis / A. Turing // Phyl. Trans. Royl. Soc. London. B. – 1952. – V. 237. – P. 37 -72.

127. Volterra, V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individul in specie animali conviventi / V. Volterra// Mem. della R. Academia Nazionale dei Lincei. – 1926. – V. 2. – P. 31 – 113.